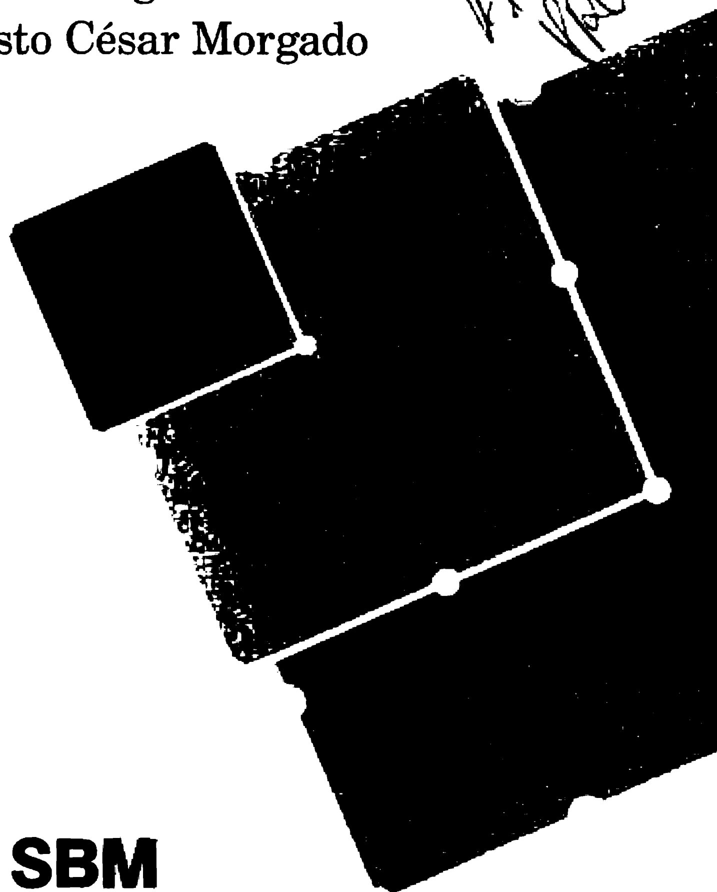
# A Matemática do Ensino Médio

## Volume 4

*Enunciados e Soluções dos Exercícios*

Elon Lages Lima
Paulo Cezar Pinto Carvalho
Eduardo Wagner
Augusto César Morgado






COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

SBM

## *COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA*

- *Logaritmos* - E. L. Lima
- *Análise Combinatória e Probabilidade com as soluções dos exercícios* - A. C. Morgado, J. B. Pitombeira, P. C. P. Carvalho e P. Fernandez
- *Medida e Forma em Geometria (Comprimento, Área, Volume e Semelhança)* - E. L. Lima
- *Meu Professor de Matemática e outras Histórias* - E. L. Lima
- *Coordenadas no Plano com as soluções dos exercícios* - E. L. Lima com a colaboração de P. C. P. Carvalho
- *Trigonometria, Números Complexos* - M. P. do Carmo, A. C. Morgado, E. Wagner, Notas Históricas de J. B. Pitombeira
- *Coordenadas no Espaço* E. L. Lima
- *Progressões e Matemática Financeira* - A. C. Morgado, E. Wagner e S. C. Zani
- *Construções Geométricas* - E. Wagner com a colaboração de J. P. Q. Carneiro
- *Introdução à Geometria Espacial* - P. C. P. Carvalho
- *Geometria Euclidiana Plana* - J. L. M. Barbosa
- *Isometrias* - E. L. Lima
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 1* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e
- A. C. Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 2* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e
- A. C. Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 3* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e
- A. C. Morgado
- *Matemática e Ensino* - E. L. Lima
- *Temas e Problemas* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Episódios da História Antiga da Matemática* - A. Aaboe
- *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática* - E. L. Lima
- *Temas e Problemas Elementares* - E. L. Lima, P. C P Carvalho, E. Wagner e
- A. C. Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio: Soluções e Exercícios* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Construções Geométricas: Exercícios e Soluções* - S. Lima Netto
- *Convite à Matemática* - D.C de Morais Filho
- *Tópicos de Matemática Elementar Volume 1 - Números Reais* - Antonio Caminha
- Tópicos de Matemática *Elementar - Volume 2 - Geometria Euclidiana Plana* - Antonio Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 3 - Introdução à Análise* - Antonio Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 4 - Combinatória* - Antonio Caminha

# Sumário

# Prefácio

Quase uma década depois da publicação do último volume da coleção "A Matemática do Ensino Médio", apresentamos aqui as soluções dos exercícios propostos naqueles três livros. Esperamos com isto torná-los mais acessíveis, oferecendo a seus usuários um elemento de controle e verificação. Além disso, como estamos incluindo também os enunciados de todos os exercícios, este volume pode ser usado independentemente, como uma coleção de problemas resolvidos.

Nesta oportunidade, prestamos uma comovida homenagem à memória de nosso companheiro Augusto Cesar Morgado, a quem dedicamos este trabalho, do qual ele participou com empenho e competência.

Rio de Janeiro, novembro de 2007

Elon Lages Lima
Paulo Cezar P. Carvalho
Eduardo Wagner

# Parte I



# CAPÍTULO 1

## Conjuntos

### 1.1 Exercícios

1. Sejam $P_1$, $P_2$, $Q_1$, $Q_2$ propriedades referentes a elementos de um conjunto-universo $U$. Suponha que $P_1$ e $P_2$ esgotam todos os casos possíveis (ou seja, um elemento qualquer de $U$ ou tem a propriedade $P_1$ ou tem $P_2$). Suponha ainda que $Q_1$ e $Q_2$ são incompatíveis (isto é, excluem-se mutuamente). Suponha, finalmente, que $P_1 \Rightarrow Q_1$ e $P_2 \Rightarrow Q_2$. Prove que valem as recíprocas: $Q_1 \Rightarrow P_1$ e $Q_2 \Rightarrow P_2$.

2. Enquadre no contexto do exercício anterior o seguinte fato geométrico: *Duas oblíquas que se afastam igualmente do pé da perpendicular são iguais. Se se afastam desigualmente então são desiguais e a maior é a que mais se afasta.*

3. Sejam $X_1 X_2$, $Y_1 Y_2$ subconjuntos do conjunto-universo $U$. Suponha que $X_1 \cup X_2 = U$ e $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, que $X_1 \subset Y_1$ e que $X_2 \subset Y_2$. Prove que $X_1 = Y_1$ e $X_2 = Y_2$.

4. Compare o execício anterior com o primeiro em termos de clareza e simplicidade dos enunciados. Mostre que qualquer um deles pode ser resolvido usando o outro. Estabeleça resultados análogos com $n$ propriedades ou $n$ subconjuntos

em vez de 2. Veja no livro "Coordenadas no Espaço", (Coleção de Professor de Matemática, SBM) pág. 83 uma utilização deste fato com $n = 8$.

5. Ainda no tema do primeiro exercício, seria válido substituir as implicações $P_1 \Rightarrow Q_1$ e $P_2 \Rightarrow Q_2$ na hipótese por suas recíprocas $Q_1 \Rightarrow P_1$ e $Q_2 \Rightarrow P_2$?

6. Escreva as implicações lógicas que correspondem à resolução da equação $\sqrt{x} + 2 = x$, veja quais são reversíveis e explique o aparecimento de raízes estranhas. Faça o mesmo com a equação $\sqrt{x} + 3 = x$.

7. Mostre que para todo $m > 0$, a equação $\sqrt{x} + m = x$ tem exatamente uma raiz.

8. Considere as seguintes (aparentes) equivalências lógicas

$$\begin{aligned} x = 1 &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \pm 1 \end{aligned}$$

Conclusão (?): $x = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Onde está o erro?

9. As raízes do polinômio $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ são 1, 2 e 3. Substitua, nesse polinômio, o termo $11x$ por $11 \times 2 = 22$, obtendo então $x^3 - 6x^2 + 16$, que ainda tem 2 como raiz mas não se anula para $x = 1$ nem $x = 3$. Enuncie um resultado geral que explique este fato e o relacione com o exercício anterior.

10. Expressões tais como "para todo" e "qualquer que seja" são chamadas de quantificadores e aparecem em sentenças dos tipos:

(1) "Para todo $x$, é satisfeita a condição $P(x)$"

(2) "Existe algum $x$ que satisfaz a condição $P(x)$"

onde $P(x)$ é uma condição envolvendo a variável $x$

a) Sendo $A$ o conjunto de todos os objetos $x$ (de um certo conjunto-universo $U$) que satisfazem a condição $P(x)$, escreva as sentenças (1) e (2) acima, usando a linguagem de conjuntos.

b) Quais são as negações de (1) e (2)? Escreva cada uma destas negações usando conjuntos e compare compare com as sentenças obtidas em a).

c) Para casa sentença abaixo, diga se ela é verdadeira ou falsa e forme sua negação:
   - Existe um número real $x$ tal que $x^2 = -1$.
   - Para todo número inteiro $n$, vale $n^2 > n$.
   - Para todo número real $x$, tem-se $x > 1$ ou $x^2 < 1$.
   - Existe um número natural $n$ tal que, para todo número real $x$, tem-se $n > x$.

11. Considere os conjuntos abaixo:

    $F$ = conjunto de todos os filósofos.

    $M$ = conjunto de todos os matemáticos.

    $C$ = conjunto de todos os cientistas.

    $P$ = conjunto de todos os professores.

    a) Exprima casa uma das afirmações de abaixo usando a linguagem de conjuntos:
       1) Todos os matemáticos são cientistas.
       2) Alguns matemáticos são professores.
       3) Alguns cientistas são filósofos.
       4) Todos os filósofos são cientistas ou professores.
       5) Nem todo professor é cientista.

    b) Faça o mesmo com as afirmacões abaixo:
       1) Alguns matemáticos são filósofos.
       2) Nem todo filosofo é cientista.
       3) Alguns filósofos são professores.
       4) Se um filosofo não é matemático, ele é professor.
       5) Alguns filósofos são matemáticos.

    c) Tomando as cinco primeiras afirmativas como hipóteses, verifique quais das afirmativas do segundo grupo são necessariamente verdadeiras.

12. O artigo 34 da Constituição Brasileira de 1988 diz o seguinte: "A União não intervirá nos Estados nem no Distrito Federal, exceto para:

I. Manter a integridade nacional;

II. Repelir invasão estrangeira ou de unidade da Federação em outra"

III. ...;

a) Suponha que o estado do Rio de Janeiro seja invadido por tropas do estado de São Paulo. O texto acima obriga a União a intervir no estado? Na sua opinião, qual era a intenção dos legisladores nesse caso?

b) Reescreva o texto do artigo 34 de modo a torná-lo mais preciso.

13. Prove que $x^2 + x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 - 2x + 1 = 0$.

14. Prove que, para $x$, $y$, $k$ inteiros, tem-se $x + 4y = 13k \Leftrightarrow 4x + 3y = 13(4k - y)$. Conclua que $4x + 3y$ e $x + 4y$ são divisíveis por 13 para os mesmos valores inteiros de $x$ e $y$.

15. O diagrama de Venn para os conjuntos $X$, $Y$, $Z$ decompõe o plano em oito regiões. Numere essas regiões e exprima cada um dos conjuntos abaixo como reunião de algumas dessas regiões. (Por exemplo: $X \cap Y = 1 \cup 2$.)

a) $(X^c \cup Y)^c$;

b) $(X^c \cup Y) \cup Z^c$;

c) $(X^c \cap Y) \cup (X \cap Z^c)$;

d) $(X \cup Y)^c \cap Z$

16. Exprimindo cada membro como reunião de regiões numeradas, prove as igualdades:

a) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$;

b) $X \cup (Y \cap Z)^c = X \cup Y^c \cup Z^c$.

17. Sejam $A$, $B$ e $C$ conjuntos. Determine uma condição necessária e suficiente para que se tenha $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.

18. A diferença entre conjuntos é definida por $A - B = \{x | x \in A \text{ e } x \notin B\}$. Determine uma condição necessária e suficiente para que se tenha $A - (B - C) = (A - B) - C$.

19. Prove que se um quadrado perfeito é par então sua raiz quadrada é par e que se um quadrado perfeito é ímpar então sua raiz quadrada é ímpar.

20. Prove o teorema de Cantor: se $A$ é um conjunto e $P(A)$ é o conjunto das partes de $A$, não existe uma função $f : A \to P(A)$ que seja sobrejetiva.

    **Sugestão**: Suponha que existe uma tal função $f$ e considere $X = \{x \in A : x \notin f(x)\}$.

## 1.2 Soluções

1. Seja $x \in U$ um objeto com a propriedade $Q_1$. Então $x$ não pode ter a propriedade $P_2$ pois $P_2 \Rightarrow Q_2$ e $Q_2$ é incompatível com $Q_1$. Como $P_1$ e $P_2$ esgotam todas as possibilidades, segue-se que $x$ tem a propriedade $P_1$. Assim, vemos que $Q_1 \Rightarrow P_1$. Da mesma forma se mostra que $Q_2 \Rightarrow P_2$.

2. Sejam $A$, $B$, $C$ pontos não-colineares e $D$ o pé da perpendicular baixada de $C$ sobre $AB$. Então $CD$ é "a perpendicular" enquanto $AC$ e $BC$ são as "duas oblíquas". As propriedades $P_1$ e $P_2$ são respectivamente as afirmações $\overline{AD} = \overline{BD}$ e $\overline{AD} \neq \overline{BD}$. Por sua vez, $Q_1$ e $Q_2$ significam $\overline{AC} = \overline{BC}$ e $\overline{AC} \neq \overline{BC}$ respectivamente. Uma vez provadas as implicações $P_1 \Rightarrow Q_1$ e $P_2 \Rightarrow Q_2$, daí resultam as recíprocas $Q_1 \Rightarrow P_1$ e $Q_2 \Rightarrow P_2$, pois as alternativas $\overline{AD} = \overline{BD}$ e $\overline{AD} \neq \overline{BD}$ esgotam as possibilidades, enquanto $\overline{AC} = \overline{BC}$ e $\overline{AC} \neq \overline{BC}$ são incompatíveis. (Alias é claro que, neste caso, também $P_1$ e $P_2$ são incompatíveis e que $Q_1$ e $Q_2$ esgotam as possibilidades.) A afirmação final do exercício, segundo a qual "a maior é a que mais se afasta", requer uma modificação na qual $P_1$ e $Q_1$ são as mesmas, porém $P_2$ significa $\overline{AD} < \overline{BD}$, $Q_2$ quer dizer $\overline{AC} < \overline{BC}$ e uma nova implicação $P_3 \Rightarrow Q_3$ é incluída, onde $P_3$ é a afirmação $\overline{AD} > \overline{BD}$ e $Q_3$ significa $\overline{AC} > \overline{BC}$. Isto naturalmente, requer provar o exercício 1 para três implicações, o que se faz do mesmo modo e antecipa o exercício 4.

3. Resta provar que $Y_1 \subset X_1$ e $Y_2 \subset X_2$. Ora, se $y \in Y_1$ então, como $X_1 \cup X_2 = U$, deve-se ter $y \in X_1$ ou $y \in X_2$. Mas, como $X_2 \subset Y_2$, se fosse $y \in X_2$ isto obrigaria $y \in Y_2$, logo $y \in Y_1 \cap Y_2$, o que não é possível pois $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$. Portanto $y \in X_1$ e daí $Y_1 \subset X_1$. Analogamente se mostra que $Y_2 \subset X_2$.

4. É claro que os exercícios 1 e 3 têm o mesmo significado, diferindo apenas na terminologia: um fala de propriedades, o outro de conjuntos. Um diz implicação, o outro inclusão. Familiarizar-se com esta equivalência é um passo essencial no aprendizado da Matemática. No livro "Coordenadas no Espaço" (pág. 83),

têm-se oito posições relativas de três planos no espaço e, por outro lado, têm-se oito hipóteses possíveis sobre as equações que representam esses planos. Para provar que as hipóteses algébricas correspondem exatamente às oito posições geométricas, demonstram-se oito implicações Álgebra $\Rightarrow$ Geometria. Não há necessidade de provar as oito recíprocas porque as hipóteses algébricas claramente esgotam todas as possibilidades e as posições geométricas são, duas a duas, obviamente incompatíveis.

5. Se continuamos admitindo que $P_1$ e $P_2$ esgotam as possibilidades, enquanto $Q_1$ e $Q_2$ são incompatíveis, as implicações $Q_1 \Rightarrow P_1$ e $Q_2 \Rightarrow P_2$ não obrigam que seja válida qualquer uma das três recíprocas: $P_1 \Rightarrow Q_1$ nem $P_2 \Rightarrow Q_2$. Basta considerar o exemplo em que $U = \mathbb{N}$, $P_1$ é a propriedade "$n$ é par", $P_2$ significa "$n$ é ímpar", $Q_1$ quer dizer "$n$ múltiplo de 4" e $Q_2$ diz "$n$ é um número primo maior que 2".

6. $\sqrt{x} + 2 = x \;\Rightarrow\; \sqrt{x} = x - 2 \;\Rightarrow\; x = (x-2)^2 \;\Rightarrow\; x = x^2 - 4x + 4 \;\Rightarrow\; x^2 - 5x + 4 = 0 \;\Rightarrow\; x = 4$ ou $x = 1$. Todas estas implicações são inversíveis, exceto a segunda. Na verdade, como $(-a)^2 = a^2$, a igualdade $x = (x-2)^2$ é satisfeita não apenas quando $\sqrt{x} = x - 2$ como também se $\sqrt{x} = -(x-2)$, ou seja $\sqrt{x} = 2 - x$. Este último caso é válido quando $x = 1$ o que explica a "raiz estranha" 1. Como vimos no texto, a seqüencia (correta) de implicações apenas diz que se $\sqrt{x} + 2 = x$ então $x = 4$ ou $x = 1$. Como $x = 1$ não cumpre a condição dada, segue-se que $x = 4$. Quando à equação $\sqrt{x} + 3 = x$, a mesma seqüencia de implicações acima nos conduz à equação $x^2 - 7x + 9 = 0$, com a condição adicional $x > 3$ (pois $x - 3 = \sqrt{x}$). As raízes desta equação são $x = (7 \pm \sqrt{13})/2$, logo apenas $x = (7 + \sqrt{13})/2$ é a raiz $> 3$, a única que serve.

7. A equação $\sqrt{x} + m = x$, para ser escrita, requer $x \geq 0$ e, para ser satisfeita, requer $x \geq m$. Tem-se $\sqrt{x} + m = x \;\Rightarrow\; \sqrt{x} = x - m \;\Rightarrow\; x = (x - m)^2$ e $x \geq m$. A igualdade $x = (x-m)^2$ é equivalente a $x^2 - (2m+1)x + m^2 = 0$. Esta equação possui duas raízes positivas distintas, cujo produto é $m^2$, logo uma delas apenas é maior do que $m$.

8. O erro está na segunda equivalência algébrica. Tem-se apenas $x^2 - 2x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$ mas a recíproca é falsa. Uma explicação mais completa está no exercício 9, a seguir.

9. Seja $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio. Definamos um novo polinômio

$q(x)$ tomando um número $\alpha$ e substituindo em $p(x)$ o termo $a_i x^i$ (é somente este termo) por $a_i \alpha^i$. O polinômio $q(x)$ tem a propriedade que $q(\alpha) = 0$. Nada mais. As demais raízes de q(x) nada têm que ver com as de $p(x)$. (Quando, no caso de um polinômio $p(x) = ax^2 + bx + c$, substituímos, no termo $bx$, a variável $x$ por uma das raízes $\alpha$ de $p(x)$, obtemos $q(x) = a(x^2 - \alpha^2)$. Uma das raízes de $q(x)$ é $\alpha$ e a outra é $-\alpha$.)

10. a) Seja $A$ o conjunto dos elementos de $U$ que satisfazem a condição $p(x)$. A afirmacão (1) significa que $A = U$ enquanto que (2) exprime que $A \neq \emptyset$.

    b) As negações de (1) e (2) são respectivamente: "Existe algum $x \in U$ que não satisfaz a condição $P(x)$" e "nenhum $x \in U$ satisfaz $P(x)$". Em termos de conjuntos (e com a notação do ítem a)), estas negações se exprimem assim: $A^c \neq \emptyset$ e $A^c = U$.

    c) Numeremos as sentenças de 1 a 5, na ordem em que aparecem. A única afirmacão verdadeira é a nº 4. As negações são: 1) Para todo número real $x$, tem-se $x^2 \neq -1$. 2) Existe um número inteiro $n$ tal que $n^2 \leq n$. 3) Existe um número real $x$ tal que $x \leq 1$ e $x^2 \geq 1$. 4) Existe um número real $x$ tal que $n < x$ para todo numero natural $n$. 5) Para todo número natural $n$, existe um número real $x$ tal que $n \leq x$.

11. a) 1) $M \subset C$; 2) $M \cap P \neq \emptyset$; 3) $C \cap F \neq \emptyset$; 4) $F \subset C \cup P$; 5) $P \cap C^c \neq \emptyset$

    b) 6) $M \cap F \neq \emptyset$; 7) $F \cap C^c \neq \emptyset$; 8) $F \cap P \neq \emptyset$; 9) $F \subset M \cup P$; 10) $F \cap M \neq \emptyset$.

    c) A afirmativa verdadeira do segundo grupo é apenas a de número 9).

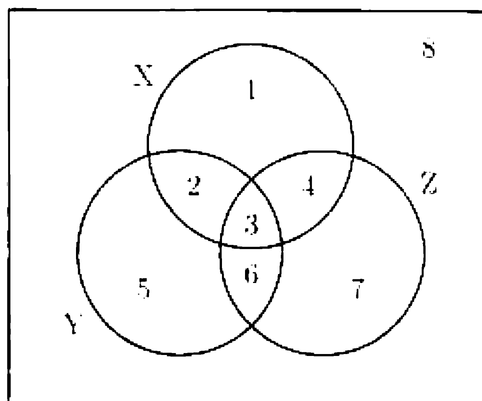
12. a) O texto constitucional não obriga intervenção federal num estado em nenhuma circunstância. Provavelmente, os legisladores queriam dizer que nos casos citados, e somente nesses casos, a União intervirá.

    b) A União intervirá nos Estados ou no Distrito Federal para...

13. Multiplicando ambos os membros da igualdade $x^2 + x - 1 = 0$ por $x - 1$, obtém-se $x^3 - 2x + 1 = 0$.

14. $x + 4y = 13k \Rightarrow 4x + 3y = 4(x + 4y) - 13y = 13(4k - y)$. Reciprocamente, $4x + 3y = 13k \Rightarrow x + 4y = 10(4x + 3y) - 13(3x + 2y) = 13 \cdot (10k - 3x - 2y)$.

15.




a) $(X^c \cup Y)^c = 1 \cup 4$;

b) $1 \cup 2 \cup 3 \cup 4 \cup 5 \cup 6 \cup 7 \cup 8$;

c) $1 \cup 2 \cup 5 \cup 6$;

d) 7.

16. a) $(X \cup Y) \cap Z = 3 \cup 4 \cup 6$ e $(X \cap Z) \cup (Y \cap Z) = (3 \cup 4) \cup (3 \cup 6) = 3 \cup 4 \cup 6$

b) $X \cup (Y \cap Z)^c = 1 \cup 2 \cup 3 \cup 4 \cup 5 \cup 7 \cup 8$ e $X \cup Y^c \cup Z^c = (1 \cup 2 \cup 3 \cup 4) \cup (1 \cup 4 \cup 7 \cup 8) \cup (1 \cup 2 \cup 5 \cup 8) = 1 \cup 2 \cup 3 \cup 4 \cup 5 \cup 7 \cup 8$.

17. A condição $A \subset C$ é necessária para que valha $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$. Com efeito, se $A \subset C$ então $A \cup C = C$, logo $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) = (A \cup B) \cap C$. Reciprocamente, se vale a igualdade $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ então $A \subset A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \subset C$, isto é, $A \subset C$. Portanto, vale $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ se, e somente se, $A \subset C$.

18. Observar que $(A - B) - C$ é o conjunto dos pontos de $A$ que não estão em $B$ nem em $C$, isto é, então apenas em $A$, enquanto que $A - (B - C)$ é formado pelos pontos que estão apenas em $A$ mais aqueles que estão em $A$ e em $C$. Logo $(A - B) - C = A - (B - C)$ se, e somente se, $A \cap C = \emptyset$.

19. Como $(2n)^2 = 2(2n^2)$ e $(2n-1)^2 = 2(2n^2 - 2n) + 1$, vemos que o quadrado de um número par é par e que o quadrado de um número ímpar é ímpar. Todo quadrado perfeito é o quadrado de sua raiz quadrada, portanto esta só pode ser par ou ímpar se o número dado o for. Mais precisamente se $k = n^2$ então $n = \sqrt{k}$ é par (ou ímpar) se, e somente se $k$ é par (ou ímpar).

20. Dada uma função arbitraria $f : A \to \mathcal{P}(A)$, considere o conjunto $X = \{x \in A;\ x \notin f(x)\}$. Então $X \in \mathcal{P}(A)$ mas não existe $x \in A$ tal que $f(x) = X$, pois a existência de um tal $x$ levaria a uma contradição. Com efeito, ou $x \in X$ ou $x \notin X$. O primeiro caso não pode ocorrer porque $x \in X \Rightarrow x \notin X$. Já no segundo caso, temos $x \notin X \Rightarrow x \in f(x) \Rightarrow x \in X$.

# CAPÍTULO 2

## Números Naturais

### 2.1 Exercícios

1. Dado o número natural $a$, seja $Y \subset \mathbb{N}$ um conjunto com as seguintes propriedades: (1) $a \in Y$; (2) $n \in Y \Rightarrow n+1 \in Y$. Prove que $Y$ contem todos os números naturais maiores do que ou iguais a $a$. (*Sugestão*: considere o conjunto $X = I_a \cup Y$, onde $I_a$ é o conjunto conjunto dos números naturais $\leq a$, e prove, por indução, que $X = \mathbb{N}$.)

2. Use o exercício anterior para provar que $2n + 1 \leq 2^n$ para todo $n \geq 2$ e, em seguida, que $n^2 < 2^n$ para todo $n \geq 5$.

3. Complete os detalhes da seguinte demonstração do Principio de Boa Orientação: Seja $A \subset \mathbb{N}$ um conjunto que não possui um menor elemento. Considere o conjunto $X$ formado pelos números naturais $n$ tais que $1, 2, \ldots, n$ não pertence a $A$. Observe que $1 \in X$ e, além disso, se $n \in X$ então todos os elementos de $A$ são $\geq n+1$. Como $n+1$ não pode ser o menor elemento de $A$, conclua que $n+1 \in X$ logo, por indução, segue-se que $X = \mathbb{N}$, portanto A é vazio.

4. Prove, por indução, que
$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq n$$

para todo $n \geq 3$ e conclua daí que a seqüencia

$$1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \ldots$$

é decrescente a partir do terceiro termo.

5. Prove, por indução, que

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

6. Critique seguinte argumentação: Quer-se provar que todo número natural é pequeno. Evidentemente, 1 é um número pequeno. Além disso, se $n$ for pequeno, $n+1$ também é pequeno o será, pois não se torna grande um número pequeno simplesmente somando-lhe uma unidade. Logo, por indução, todo número natural é pequeno.

7. Use a distributividade para calcular $(n+m)(1+1)$ de duas maneiras diferentes e em seguida use a lei do corte para concluir que $m+n = n+m$.

8. Seja $X \subset \mathbb{N}$ um conjunto não-vazio, com a seguinte propriedade: para qualquer $n \in \mathbb{N}$, se todos os números naturais menores do que $n$ pertencem a $X$ então $n \in X$. Prove que $X = \mathbb{N}$. (*Sugestão*: Boa ordenação.)

9. Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural $n$. Suponha que $P(1)$, $P(2)$ são verdadeiras e que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, a verdade de $P(n)$ e $P(n+1)$ implica a verdade $P(n+2)$. Prove que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

10. Use indução para provar que

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

## 2.2 Soluções

1. Seja $X = \{n \in \mathbb{N};\ a+n \in Y\}$. Como $a \in Y$, segue-se que $a+1 \in Y$, portanto $1 \in X$. Logo $X = \mathbb{N}$. Assim, $Y$ contem todos os números naturais $\geq a$.

2. Seja $X = \{n \in \mathbb{N};\ 2n+1 < 2^n\}$. Temos $3 \in Y$. Além disso, $n \in Y \Rightarrow 2n+1 < 2^n \Rightarrow 2(n+1)+1 = 2n+1+2 < 2^n + 2^n = 2^{n+1} \Rightarrow n+1 \in Y$. Portanto $Y$ contem todos os números naturais $\geq 3$, ou seja, $n \geq 3 \Rightarrow 2n+1 < 2^n$. Em seguida, seja $Z = \{n \in \mathbb{N},\ n^2 < 2^n\}$. Temos $5 \in Z$ e, além disso, $n \in Z \Rightarrow n^2 < 2^n \Rightarrow (n+1)^2 = n^2+2n+1 < 2^n+2^n = 2^{n+1} \Rightarrow n+1 \in Z$

3. Seja $A \subset \mathbb{N}$ um conjunto que não possui um menor elemento. Considere o conjunto $X$ formado pelos número naturais $n$ tais que $1, 2, \ldots, n$ não pertencem a $A$. Então $1 \in X$ pois do contrario pertencia a $A$ e seria, portanto, o menor elemento de $A$. Em seguida mostramos que $n \in X \Rightarrow n+1 \in X$. Com efeito, $n \in X \Rightarrow 1, 2, \ldots, n$ não pertencem a $A$. Se fosse $n+1 \in A$ então $n+1$ seria o menor elemento de $A$, o que não é possível. Logo $1, 2, \ldots, n, n+1$ não pertencem a $A$, isto é, $n+1 \in X$. Assim $X = \mathbb{N}$, isto é, $A = \emptyset$.

4. Sabemos que $\left(\frac{2+1}{2}\right)^2 < 2$. Ignorando isto, mostremos que $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < n$ para $n \geq 3$. É claro que $(4/3)^3 = 64/27 < 3$. Agora, indução:

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < n \Rightarrow \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$
$$< \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right) < \frac{n(n+2)}{n+1} < \frac{n(n+1)}{n}$$

Escrevendo $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < n$ sob a forma $(n+1)^n < n^{n+1}$ vemos que $\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}$ para $n \geq 3$. Logo $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \ldots$ é decrescente a partir do 3º termo.

5. A igualdade indicada é obviamente verdadeira para $n = 1$. Supondo-a válida para certo $n$ temos

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Para provar a implicação $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, basta verificar que

$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = (n+1)^2,$$

o que é imediato.

6. O problema resulta do fato de que o "conjunto" dos números naturais pequenos não está bem definido. O "conjunto" dos números pequenos é limitado? Se é, (como deveria) então qual é o maior número pequeno?

7. Por um lado (distributividade à direita), $(m+n)(1+1) = m+n+m+n$. Por outro lado (distributividade à esquerda, depois à direita), $(m+n)(1+1) = m(1+1) + n(1+1) = m+m+n+n$.

Logo $m+n+m+n = m+m+n+n$.

Pela lei do corte (aplicada duas vezes) $n+m = m+n$.

8. Suponha que seja $X \neq \mathbb{N}$. Seja $a$ o menor elemento do conjunto não-vazio $A = \mathbb{N} - X$. Então todos os números naturais menores do que $a$ pertencem a $X$. Pela hipóteses, segue-se que $a \in X$. Contradição. Logo $A = \emptyset$ e $X = \mathbb{N}$.

9. Suponha que o conjunto $A$ dos números naturais $n$ para os quais $P(n)$ é falsa seja não-vazio. Então $1 < a$, $2 < a$ e, além disso $P(a-2)$ e $P(a-1)$ são verdadeiras. Segue-se da hipótese (enunciado) que $P(a)$ é verdadeira. Contradição. Logo $A = \emptyset$ e $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

10. Certamente $1^3 = \frac{1}{4}1^2(1+1)^2$. Suponha, por indução, que

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

Para provar que se tem

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2 \cdot (n+2)^2,$$

basta verificar que

$$\frac{1}{4}(n+1)^2 \cdot (n+2)^2 - \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = (n+1)^3$$

ou seja, que

$$\frac{1}{4}[(n^2+2n+1)(n^2+4n+4)] - \frac{1}{4}[n^2(n^2+2n+1)] = (n+1)^3$$

$$\frac{1}{4}[\not{n}^4 + \not{6}n^3 + \not{1}3n^2 + 12n + 4 - \not{n}^4 - 2\not{n}^3 - \not{n}^2] = (n+1)^3$$

$$\frac{1}{4}[4n^3 + 12n^2 + 12n + 4] = (n+1)^3$$

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3$$

**Observação:** A igualdade $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ pode também ser escrita sob a forma

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$

Desta maneira, a indução fica mais fácil.

# CAPÍTULO 3

## Números Cardinais

### 3.1 Exercícios

1. Seja $f : X \to Y$ uma função. A *imagem inversa* por $f$ de um conjunto $B \subset Y$ é o conjunto $f^{-1}(B) = \{x \in X;\ f(x) \in B\}$. Prove que se tem sempre $f^{-1}(f(A)) \supset A$ para todo $A \subset X$ e $f(f^{-1}(B)) \subset B$ para todo $B \subset Y$. prove também que $f$ é injetiva se, e somente se, $f^{-1}(f(A)) = A$ para todo $A \subset X$. Analogamente, mostre que $f$ é sobrejetiva se, e somente se, $f(f^{-1}(B)) = B$ para todo $B \subset Y$.

2. Prove que a função $f : X \to Y$ é injetiva se, e somente se, existe uma função $g : Y \to X$ tal que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in X$.

3. Prove que a função $f : X \to Y$ é sobrejetiva se, e somente se, existe uma função $h : Y \to X$ tal que $f(h(y)) = y$ para todo $y \in Y$.

4. Dada a função $f : X \to Y$, suponha que $g, h : Y \to X$ são funções tais que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in X$ e $f(h(y)) = y$ para todo $y \in Y$. Prove que $g = h$.

5. Defina uma função sobrejetiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, a equação $f(x) = n$ possui uma infinidade de raízes $x \in \mathbb{N}$. (*Sugestão*: todo número natural se escreve, de modo único sob a forma $2^a \cdot b$, onde $a, b \in \mathbb{N}$ e $b$ é ímpar.)

6. Prove, por indução, que se $X$ é um conjunto finito com $n$ elementos então existem $n!$ bijeções $f : X \to X$.

7. Qual o erro da seguinte demostração por indução:

   **Teorema.** *Todas as pessoas têm a mesma idade.*

   **Prova:** Provaremos por indução que se $X$ é um conjunto de $n$ $(n \geq 1)$ pessoas então todos os elementos de $X$ têm a mesma idade.

   Se $n = 1$ a afirmacão é evidentemente verdadeira pois se $X$ é um conjunto formado por uma única pessoa, todos os elementos de $X$ têm a mesma idade.

   Suponhamos agora que a afirmação seja verdadeira para todos os conjuntos de $n$ elementos. Consideremos um conjunto com $n+1$ pessoas, $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ Ora, $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ é um conjunto de $n$ pessoas logo $a_1, a_2, \ldots. a_n$ têm a mesma idade. Mas $\{a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ também é um conjunto de $n$ elementos, todos os seus elementos, em particular $a_n$ e $a_{n+1}$, têm a mesma idade. Mas de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ têm a mesma idade e $a_n$, $a_{n+1}$ têm a mesma idade, todos os elementos de $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ têm a mesma idade, conforme queríamos demonstrar.

8. Prove, por indução, que um conjunto com $n$ elementos possui $2^n$ subconjuntos.

9. Dados $n$ $(n \geq 2)$ objetos de pesos distintos, prove que é possível determinar qual o mais leve e qual o mais pesado fazendo $2n - 3$ pesagens em uma balança de pratos. É esse número mínimo de pesagens que permite determinar o mais leve e o mais pesado?

10. Prove que, dado um conjunto com $n$ elementos, é possível fazer uma fila com seus subconjuntos de tal modo que cada subconjunto da fila pode ser obtido partir do anterior pelo acréscimo ou pela supressão de um único elemento.

11. Todos os quartos do Hotel Cantor estão ocupados, quando chegam os trens $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$ (em quantidade infinita), cada um deles com infinitos passageiros. Que deve fazer o gerente para hospedar todos?

## 3.2 Soluções

1. a) $x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(A)) \therefore A \subset f^{-1}(f(A))$.

b) $y \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow y = f(x),\ x \in f^{-1}(B) \Rightarrow y = f(x),\ f(x) \in B \Rightarrow y \in B \therefore f(f^{-1}(B)) \subset B$

c) Seja $f$ injetiva. Se $x \in f^{-1}(f(A))$ então $f(x) \in f(A)$, isto é tem-se $f(x) = f(a)$ para algum $a \in A$, logo $x = a$ e $x \in A$. Assim, $f^{-1}(f(A)) \subset A$ e daí (vide a)) $f^{-1}(f(A)) = A$, reciprocamente, se $f^{-1}(f(A)) = A$ para todo $A \subset X$ então dados $x_1, x_2 \in X$ com $f(x_1) = f(x_2)$, tomando $A = \{x_1\}$ temos $x_2 \in f^{-1}(f(A)) = A = \{x_1\}$ logo $x_2 = x_1$ e $f$ é injetiva.

d) Seja $f$ sobrejetiva, Então, para todo $B \subset Y$, temos: $b \in B \Rightarrow b = f(x),\ x \in X \Rightarrow b = f(x),\ x \in f^{-1}(B) \Rightarrow b \in f(f^{-1}(b))$.

Assim $B \subset f(f^{-1}(B))$. Por b), segue-se que $f(f^{-1}(B)) = B$. Reciprocamente, se $f(f^{-1}(B)) = B$ para todo $B \subset Y$ então, tomando $y \in Y$ arbitrariamente e pondo $B = \{y\}$ vemos que $f(f^{-1}(y)) = \{y\}$ logo $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ e $f(x) = y$ qualquer que seja $x \in f^{-1}(y)$. Logo $f$ é sobrejetiva.

2. Se existir $g : Y \to X$ tal que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in X$ então $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$ logo $f$ é injetiva. Reciprocamente, se $f$ é injetiva então definimos $f : X \to X$ assim: fixamos $x_0 \in X$. Dado $y \in Y$, se não existir $x \in X$ tal que $f(x) = y$, pomos $g(y) = x_0$. Se $y = f(x)$ para algum $x \in X$, este $x$ é único e então pomos $g(y) = x$. A função $g : Y \to X$ cumpre $g(f(x)) = x$.

3. Se existir $g : Y \to X$ tal que $f(g(y)) = y$ para todo $y \in Y$ então, para todo $y \in Y$ tem-se $y = f(x)$, com $x = g(y)$, logo $f$ é sobrejetiva. Reciprocamente, se $f$ é sobrejetiva então, para cada $y \in Y$ o conjunto $f^{-1}(y)$ é $\neq \emptyset$. Escolhamos $x \in f^{-1}(y)$ e pomos $g(y) = x$. A função $g : Y \to X$ cumpre $f(g(y)) = y$.

4. Para todo $y \in Y$, pondo $h(y) = x$, temos

$$g(y) = g(f(h(y))) = g(f(x)) = x = h(y).$$

5. Defina $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ pondo $f(n) = 1$ se $n$ é ímpar e, caso $n$ seja par, escreva $n = 2^a \cdot b$, com $b$ ímpar, e ponha $f(n) = a$. Como há infinitos números ímpares, a equação $f(x) = n$ tem para todo $n \in \mathbb{N}$, infinitas soluções.

6. Isto é claro se $n = 1$. Supondo verdadeira a afirmacão para conjuntos com $n$ elementos, seja $X$ um conjunto com $n+1$ elementos. Fixe um elemento $a \in X$. Uma bijeção $f : X \to X$ consiste em escolher $a' = f(a)$ e definir uma bijeção de

$X - \{a\}$. Existem $n+1$ escolhas possíveis para $a'$ e (por indução) $n!$ possíveis bijeções de $X - \{a\}$ sobre $X - \{a'\}$. Segue-se que há $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$ bijeções de $X$.

7. O erro consiste na passagem $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, que é falsa quando $n = 1$. (Não é verdade que $P(1) \Rightarrow P(2)$. Mais exatamente: $P(2)$ é certamente falsa.)

8. Seja $P(n)$ a afirmação de que um conjunto com $n$ elementos tem $2^n$ subconjuntos. Então $P(1)$ é verdadeira pois se $X = \{a\}$ então $\emptyset$ e $\{a\}$ são os dois únicos subconjuntos de $X$. Supondo $P(n)$ verdadeira, seja $X$ um conjunto com $n+1$ elementos. Fixando $a \in X$, seja $X' = X - \{a\}$. Há dois tipos de subconjuntos de $X$: as partes de $X'$ (em número de $2^n$) e os subconjuntos que contêm $a$ (também são $2^n$ deles). Como $2^n + 2^n = 2^{n+1}$, segue-se $P(n+1)$.

9. $P(2)$ é óbvio pois uma só pesagem é suficiente para saber, entre dois objetos, qual é o mais leve e qual o mais pesado. Supondo $P(n)$ verdadeira, efetuamos $2n-3$ pesagens e encontramos, entre $n$ objetos dados, o mais leve $L$ e o mais pesado $P$. Agregando-se o $(n+1)$-ésimo objeto, basta efetuar duas pesagens mais, comparado-o com $L$ e com $P$. Se ele for mais leve do que $L$, será o mais leve dos $n+1$ novos objetos. Se for mais pesado que $P$ também o problema está resolvido. Se for mais pesado que $L$ e mais leve que $P$ então $L$ e $P$ continuarão sendo o mais leve e o mais pesado. $2n-3$ é o menor número possível para resolver o problema, como se vê considerando três objetos.

10. $P(1)$ é claro. Suponhamos todos os subconjuntos de um conjunto $X$ com $n$ elementos disposto numa fila, de modo que cada um desses subconjuntos difira do anterior pelo acréscimo ou pela retirada de um elemento. Tomemos um $(n+1)$-ésimo elemento e estendemos a fila acrescentando-o, na ordem inversa, a cada subconjunto da fila anterior, começando com o último. Desta maneira obteremos todos os subconjuntos de $X$ dispostos como está prescrito no enunciado.

11. No hotel, cujos quartos são $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$, passe o hóspede do quarto $Q_n$ para $Q_{2n-1}$. Assim, todos os quartos de número par ficam vazios e os quartos de numero ímpar, ocupados. Em seguida, numere os trens assim: $T_1, T_3, T_5, T_7, \ldots$. Os passageiros do trem $T_i$ serão $p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{ik}, \ldots$, de modo que $p_{ik}$ é o $k$-ésimo passageiro do trem $T_i$. Finalmente, complete a locação do

hotel alojando o passageiro $p_{ik}$ no quarto de número $2^k \cdot i$. Como todo número par se escreve, de modo único, sob a forma $2^k \cdot i$ com $k \in \mathbb{N}$ e $i$ ímpar, haverá um hóspede apenas em cada quarto.

# CAPÍTULO 4

## Números Reais

### 4.1 Exercícios

1. Dados os intervalos $A = [-1,3)$, $B = [1,4]$, $C = [2,3)$, $D = (1,2]$ e $E = (0,2]$ dizer se 0 pertence a $((A - B) - (C \cap D)) - E$.

2. Verifique se cada passo na solução das inequações abaixo está correto:

   a) $\frac{5x+3}{2x+1} > 2 \;\Rightarrow\; 5x+3 > 4x+2 \;\Rightarrow\; x > -1$

   b) $\frac{2x^2+x}{x^2+1} < 2 \;\Rightarrow\; 2x^2+x < 2x^2+2 \;\Rightarrow\; x < 2$

3. Seja $a, b, c, d > 0$ tais que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Mostre que

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

   Interprete este resultado no caso em que $a, b, c, d$ são inteiros positivos (isto é, o que significa somar numeradores e denominadores de duas frações?)

4. Qual é aproximação de raiz cúbica de 3 por falta com uma casa decimal?

5. Ao terminar um problema envolvendo radicais, os alunos normalmente são instados a racionalizar o denominador do resultado obtido Por que isso?

6. Considere todos os intervalos da forma $[0, \frac{1}{n}]$. Existe um número comum todos estes intervalos? E se forem tomados os intervalos abertos?

7. Considere um número racional $m/n$, onde $m$ e $n$ são primos relativos entre si. Sob que condições este número admite uma representação decimal finita? Quando a representação é uma dízima periódica simples?

8. O numero $0,123456789101112131415\ldots$ é um número irracional?

9. Utilize a interpretação geométrica de módulo para resolver as equações e inequações abaixo:

   a) $|x-1| = 4$
   b) $|x+1| < 2$
   c) $|x-1| < |x-5|$
   d) $|x-2| + |x+4| = 8$
   e) $|x-2| + |x+4| = 1$

10. Sejam $a$ e $b$ números reais não negativos. mostre que

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 < \frac{a^2+b^2}{2}$$

Interprete geometricamente esta desigualdade.

11. Sabemos que os números reais $x, y$ satisfazem as desigualdades $1,4587 < x < 1,4588$ e $0,1134 < y < 0,1135$, têm-se os valores exatos de $x$ e $y$ até milésimos. Que grau de precisão, a partir daí, podemos ter para o valor de $xy$? Determine esse valor aproximado. Como procederíamos para obter um valor aproximado de $x/y$? Qual o grau de precisão encontrado no caso do quociente?

## 4.2 Soluções

1. É claro que $0 \in A$ mas não pertence a $B$ nem a $C \cap D$ nem a $E$. Logo $0 \in ((A \quad B) - (C \cap D)) - E$.

2. a) A implicação $\frac{5x+3}{2x+1} > 2 \;\Rightarrow\; 5x+3 > 4x+2$ é obtida multiplicando a primeira desigualdade por $2x+1$. Portanto só é válida quando $2x+1 > 0$,

ou seja $x > -1/2$. A maneira correta de resolver esta inequação é separar 2 casos: $x > -1/2$ 4 $x < -1/2$. (Evidentemente, não tem sentido pôr $x = -1/2$.) No primeiro caso, a solução é $x > -1/2$ e $x > -1$, logo $x > -1/2$. No segundo caso, para $x < -1/2$, tem-se $2x + 1 < 0$ logo vale:

$$\frac{5x+3}{2x+1} > 2 \Rightarrow 5x + 3 < 4x + 2 \Rightarrow x < -1$$

A resposta é $x < -1$ ou $x > -1/2$, Equivalentemente: $x \notin [-1, -1/2]$.

b) As implicações estão todas corretas: a primeira resulta de multiplicar ambos membros da desigualdade por $x^2 + 1$, que é sempre $> 0$ para todo $x$. A segunda consiste em somar $-2x^2$ a ambos membros. Valem as implicações opostas, em (a) e (b)

3. $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow ad < bc \Rightarrow (a+c)d = ad + cd < (b+d)c \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. Analogamente $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$. Uma possível interpretação de $\frac{a+c}{b+d}$ é a seguinte: na primeira fase de um campeonato foram realizados $b$ jogos com um total de $a$ gols convertidos. O número médio de gols por partida foi $\frac{a}{b}$. Na segunda fase: $\frac{c}{d}$. Média de gols por jogo no campeonato inteiro: $\frac{a+c}{b+d}$. supondo que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, tem-se claramente $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

4. Como $1^3 < 3 < 2^3$, temos $\sqrt[3]{3} = 1, \ldots$. Além disso, $1,1^3 = 1,33$; $1,2^3 = 1,72$; $1,3^3 = 2,19$; $1,4^3 = 2,74$ e $1,5^3 = 3,37$. Logo a aproximação pedida para $\sqrt[3]{3}$ é $1,4$.

5. No cálculo numérico, quando se deve efetuar uma divisão cujo dividendo é irracional, usa-se um valor aproximado do denominador. Se quisermos obter um grau de aproximação maior para o quociente, toma-se uma aproximação melhor para esse denominador e é-se obrigado a refazer a operação desde o início. Se, entretanto, a irracionalidade estiver no numerador apenas, basta prolongar la divisão acrescentando mais algarismos decimais ao dividendo, sem precisar recomeçar tudo de novo. Compare por exemplo, as operações $1/\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}/2$. Evidentemente, estamos falando de operações efetuadas manualmente. No caso de cálculo eletrônico, não há quase diferença alguma. Aqui deve-se ter cuidado apenas com denominadores muito pequenos (em relação ao numerador), onde uma pequena variação dos quais pode causar grandes alteração no quociente.

6. O número 0 pertence a todos os intervalos $[0, 1/n]$, $n \in \mathbb{N}$. Nenhum outro número real $x > 0$ pode pertencer a todos esses intervalos porque, dado $x > 0$

podemos sempre achar $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 1/x$, donde $x > 1/n$, portanto $x \notin [1, 1/n]$. [Um modo prático de obter um número natural $n > x$ consiste em tomar a expressão decimal de $x$, desprezar a parte após a vírgula e pôr $n = 1+$(a parte inteira de $x$).]

7. O número racional representado pela fração irredutível $m/n$ tem uma expressão decimal quando existe um inteiro $k$ tal que $n \cdot k$ seja uma potência de 10. Para isso, é suficiente que seu denominador seja da forma $n = 2^a \cdot 5^b$. Por outro lado, se $n$ é primo com 10 (isto é, não é divisível por 2 nem por 5) então $\frac{m}{n}$ gera uma dízima periódica simples. Com efeito, algum múltiplo de $n$ tem a forma $99\ldots90\ldots0$ mas, como $n$ é primo com 10, se $n$ divide $99\ldots9 \times 10^r$, divide o fator $99\ldots9$. Logo podemos afirmar que $n$ tem um múltiplo tipo $99\ldots9$. Se $n \cdot k = 99\ldots9$ então $\frac{mk}{nk} = \frac{mk}{99\ldots9}$ =geratriz de uma dízima periódica simples.

8. Como $0,1234567\ldots$ não é periódico, trata-se de um número irracional.

9. a) $|x-1| < 4$ significa que a distancia de $x$ a 1 é menor do que 4. Logo $|x-1| < 4 \Leftrightarrow x \in (-3,5) = (1-4, 1+4)$.

   b) $|x+1| < 2 \Leftrightarrow$ a distancia de $x$ a $-1$ é menor do que $2 \Leftrightarrow x \in (-3,1) = (-1-2, -1+2)$.

   c) $|x-1| < |x-5| \Leftrightarrow x$ está mais próximo a 1 do que 5. O ponto equidistante de 1 a 5 é $x = 3$. Logo deve ser $x < 3$.

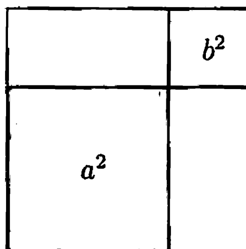
   d) $|x-2| + |x-4| = 8 \Leftrightarrow$ (distancia de $x$ a 4) + (distancia de $x$ a 2)=8. Evidentemente, $x$ não pode estar entre 2 e 4. logo há duas possibilidades: $x > 4$ ou $x < 2$. No primeiro caso $x - 2 + x - 4 = 8$, $x = 7$. No segundo caso, $2 - x + 4 - x = 8$, $x = -1$.

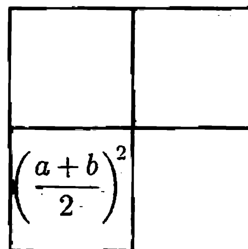
   e) $|x-2| + |x+4| = 1$. Novamente, $x$ não pode estar entre 2 e 4 porque neste caso a soma das distancias de $x$ a 2 e a 4 seria sempre 2. Se $x$ estiver à direita de 4, sua distancia a 2 será pelo menos 2. Se $x$ estiver à esquerda de 2 então sua distancia a 4 será $\geq 2$. Assim, a equação $|x-2| + |x+4| = 1$ não tem solução.

10. $\dfrac{a^2+b^2}{2} - \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2+b^2}{2} - \dfrac{a^2+2ab+b^2}{4} = \dfrac{a^2-2ab+b^2}{2} = \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2 \geq 0.$

Logo $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$.

**Interpretação geométrica:** A desigualdade de acima significa que a parte escura na figura tem área mínima quando os dois pequenos quadrados são iguais.




11. Se $1,4587 < x < 1,4588$ e $0,1134 < y < 0,1135$ então, multiplicando membro a membro estas desigualdade obtemos $0,16541 < xy < 16557$. Tomando os inversos multiplicativos nas desigualdades que envolvem $y$, temos

$$8,8105 < y^{-1} < 8,8183$$

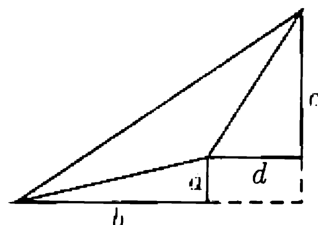
Portanto (multiplicando estas desigualdades por aquelas que envolvem $x$) resulta que

$$12,851 < \frac{x}{y} < 12,864.$$

Assim, vemos que $xy = 0,165$ com 3 algarismos decimais exatos e erro inferior a 1 décimo milésimo, por falta. Por outro lado, $\frac{x}{y} = 12,8$ com 1 algarismo decimal exato e erro inferior a 1 centésimo, por falta.

**Outra interpretação geométrica do Exercício 4.3.**

Comparando as tangentes:




$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

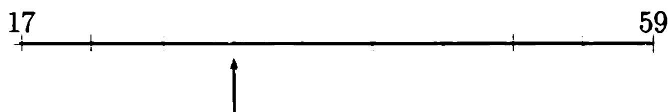
# CAPÍTULO 5

## Funções Afins

### 5.1 Exercícios

1. Quando dobra o percurso em uma corrida de táxi, o custo da nova corrida é igual ao dobro, maior que o dobro ou menor que o dobro da corrida original?

2. A escala da figura abaixo é linear. Calcule o valor correspondente ao ponto assinalado



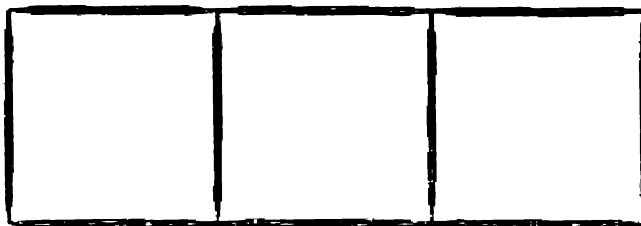

3. A escala $N$ de temperatura foi feita com base nas temperaturas máxima e mínima em nova Iguaçu. A correspondência com a escala Célsius é a seguinte:

| °N | °C |
|---|---|
| 0 | 18 |
| 100 | 43 |

Em que temperatura ferve a água na escala $N$?

4 Uma caixa de 1000 litros tem um furo no fundo por onde escoa água a uma vazão constante. Ao meio dia de certo dia ela foi cheia e, às 6 da tarde desse dia, só tinha 850 litros. Quanto ficará pela metade?

5. Um garoto brinca de arrumar palitos fazendo uma seqüencia de quadrados como na figura. Se ele fez $n$ quadrados, quantos palitos utilizou?



6. Admita que 3 operários, trabalhando 8 horas por dia, construam um muro de 36 metros em 5 dias.

   a) Quantos dias são necessários para que uma equipe de 5 operários trabalhando 6 horas por dia, construa um mura de 15 metros?

   b) Que hipóteses foram implicitamente utilizadas na solução do ítem anterior?

   c) Dentro dessas mesmas hipóteses, exprima o número $D$ de dias necessários à construção de um muro em função do número $N$ de operários, do comprimento $C$ do muro e do número $H$ de horas trabalhadas por dia.

7. As leis físicas, muitas vezes, descrevem relações de proporcionalidade direta ou inversa entre grandezas. Para cada uma das leis abaixo, escreva a expressão matemática correspondente.

   a) (*Lei da gravitação universal*). Matéria atrai matéria na razão direta das massas e na razão inversa do quadrado da distancia.

   b) (*Gases perfeitos*). A pressão exercida por uma determinada massa de um gás é diretamente proporcional à temperatura absoluta e inversamente proporcional ao volume ocupado pelo gás.

c) (*Resistência elétrica*). A resistência de um fio condutor é diretamente proporcional ao seu comprimento e inversamente proporcional à área de sua seção reta.

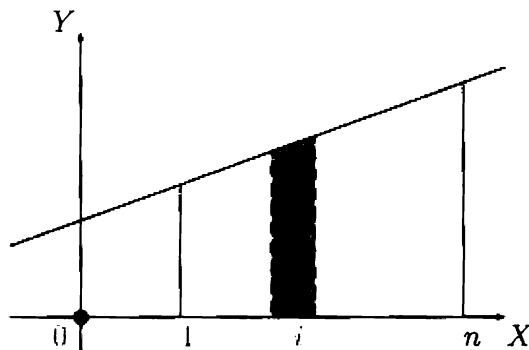
d) (*Dilatação térmica*). A dilatação térmica sofrida por uma barra é diretamente proporcional ao comprimento da barra e à variação da temperatura.

8. As grandezas $X$ e $Y$ são inversamente proporcionais. Se $X$ sofre um acréscimo de 25% qual o decréscimo percentual sofrido por $Y$?

9. Os termos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de uma P.A. são os valores $f(1), f(2), \ldots, f(n)$ de uma função afim.

a) Mostre que cada $a_i$ é igual à área de um trapézio delimitado pelo gráfico de $f$, pelo eixo $OX$ e pela retas verticais de equações

$$x = i - \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x = i + \frac{1}{2}.$$




b) Mostre que a soma $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ é igual à área do trapézio delimitado pelo gráfico de $f$, pelo eixo $OX$ e pelas retas verticais $x = \frac{1}{2}$ e $x = n + \frac{1}{2}$.

c) Conclua que $S = \frac{a_1 + a_n}{2} n$.

10. Pessoas apressadas podem diminuir o tempo gasto em uma escada rolante subindo alguns degraus da escada no percurso. Para uma certa escada, observa-se que uma pessoa gasta 30 segundos na escada quando sobre 5 degraus e 20 segundos quando sobe 10 degraus. Quantos são os degraus da escada e qual o tempo normalmente gasto no percurso?

11. Augusto, certo dia, fez compras em 5 lojas. Em cada loja, gastou metade do que possuía e pagou, após cada compra, R$ 2,00 de estacionamento. Se após toda essa atividade ainda ficou com R$ 20,00, que quantia ele tinha inicialmente?

12. Seguindo as idéias de E. W., construa uma régua para medir números de sapatos.

13. Estuda-se a implantação da chamada "fórmula 95". Por essa fórmula os trabalhadores teriam direito à aposentadoria quando a soma da idade com o número de anos de serviço atingisse 95. Adotada essa fórmula, quem começasse a trabalhar com 25 anos, com que idade se aposentaria?

14. Em uma escola há duas provas mensais, a primeira com peso 2 e a segunda com peso 3. Se o aluno não alcançar média 7 nessas provas, fará prova final. Sua média final será então a média entra a nota da prova final, com peso 2 e a média das provas mensais, com peso 3. João obteve 4 e 6 nas provas mensais. Se a média final para aprovação é 5, quanto ele precisa obter na prova final para ser aprovado?

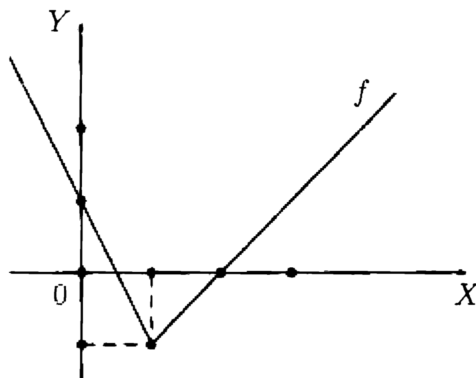
15. Arnaldo dá a Beatriz tantos reais quanto Beatriz possui e dá a Carlos tantos reais quanto Carlos possui. Em seguida, Beatriz dá a Arnaldo e a Carlos tantos reais quanto cada um possui. Finalmente, carlos faz o mesmo. terminam todos com R$ 16,00 cada. Quanto cada um possuía no inicio?

16. Um carro sai de $A$ para $B$ e outro de $B$ para $A$, simultaneamente, em linha reta, com velocidades constantes e se cruzam em um ponto situado a 720m do ponto de partida mais próximo. Completada a viagem, cada um deles pára por 10min e regressa, com a mesma velocidade da ida. Na volta, cruzam-se em um ponto situado a 400m de outro ponto de partida. Qual a distancia de $A$ até $B$?

17. Em uma ferrovia, as estações $A$ e $B$ distam entre si 3 km e a cada 3 min parte um trem de cada uma delas em direção à outra. Um pedestre parte de $A$ para $B$, no exato momento em que um trem parte de $A$ para $B$ e outro chega a $A$ vindo de $B$. Ele chega a $B$ no exato momento em que um trem parte de $B$ para $A$ e outro trem chega a $B$ vindo de $A$. Em seu caminho, o pedestre encontrou 17 trens que iam no mesmo sentido que ele e com 23 trens que iam no sentido oposto ao seu, aí incluídos os 4 trens já citados anteriormente. As velocidades dos trens são iguais. Calcule as velocidades dos trens e do pedestre.

18. Dado o gráfico da função $f$, abaixo, obtenha, em cada caso, o gráfico da função $g$ tal que:

   a) $g(x) = f(x) - 1$
   b) $g(x) = f(x - 1)$
   c) $g(x) = f(-x)$
   d) $g(x) = 2f(x)$
   e) $g(x) = f(2x)$
   f) $g(x) = |f(x)|$
   g) $g(x) = f(|x|)$
   h) $g(x) = \max\{f(x), 0\}$




19. Determine os valores reais de $x$ que satisfazem:

   a) $2x + 3 - (x - 1) < x + 1$
   b) $2x + 3 - (x - 1) < x + 5$
   c) $\min\{x + 1; 5 - x\} > 2x - 3$
   d) $\min\{x + 1; 5 - x\} < 2x$
   e) $\min\{2x - 1; 6 - x\} = x$
   f) $2|x + 1| - |1 - x| \leq x + 2$
   g) $(2x + 3)(1 - x) = (2x + 3)(x - 2)$
   h) $|x + 1 - |x - 1|| \leq 2x - 1$

20. Resolva a inequação

$$\frac{1}{2x+1} < \frac{1}{1-x}.$$

21. Determine a imagem da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \max\{x - 1, 10 - 2x\}$.

22. Faça os gráficos de:

    a) $f(x) = \min\{4 - x; x + 1\}$

    b) $f(x) = |x + 1| - |x - 1|$

23. Identifique o conjunto dos pontos $(x, y)$ tais que:

    a) $|x| + |y| = 1$

    b) $|x - y| = 1$

24. Um supermercado está fazendo uma promoção na venta de alcatra: um desconto de 10% é dado nas compras de quilos ou mais. Sabendo que o preço do quilo de alcatra é de R$ 4,00, pede-se:

    a) o gráfico do total pago em função da quantidade comprada.

    b) o gráfico do preço médio por quilo em função da quantidade comprada.

    c) a determinação de quais consumidores poderia ter comprado mais alcatra pagando o mesmo preço.

25. Um supermercado está fazendo uma promoção na venta de alcatra: um desconto de 10% é dado nas compras de quilos ou mais. Sabendo que o preço do quilo de alcatra é de R$ 4,00, pede-se:

    a) o gráfico do total pago em função da quantidade comprada.

    b) o gráfico do preço médio por quilo em função da quantidade comprada.

    c) a determinação de quantos quilos foram comprados por um consumidor que pagou R$ 15,00.

26. Os novos valores de IR-fonte:

| Base de cálculo | Alíquota | Parcela a deduzir |
|---|---|---|
| Até R$ 900 | Isento | - |
| De R$ 900 a R$ 1800 | 15% | R$ 135 |
| Acima de R$ 1800 | 25% | R$ 315 |

Fonte: Secretaria da Receita Federal

Baseado na tabela de acima, construa o gráfico do imposto a pagar em função do rendimento.

27. O imposto de renda $y$ pago por uma pessoa que, em 1995, teve uma renda líquida $y$ é calculado através de uma expressão da forma $y = ax - p$, onde a alíquota $a$ e a parcela a deduzir $p$ dependem da renda $x$ e são dadas por uma tabela, parcialmente fornecida a seguir.

| Renda (em R$) | Alíquota ($a$) | Parcela a deduzir ($p$) |
|---|---|---|
| Até 8800 | 0 | 0 |
| De 8800 | 15% | |
| De 17160 a 158450 | 26% | |
| Mais de 158450 | 35% | |

a) Complete a tabela, de modo que o imposto a pagar varie continuamente com a renda (isto é, não haja saltos ao se passar de uma faixa de renda para outra).

b) Se uma pessoa está na terceira faixa e sua renda aumenta em R$ 5.000,00, qual será seu imposto adicional (supondo que este acréscimo não acarrete uma mudança de faixa)?

c) É comum encontrar pessoas que lamentam estar no inicio de uma faixa de taxação ("que azar ter recebido este dinheiro e mais!"). Este tipo de reclamação é procedente?

d) A tabela de taxação é, às vezes, dada de uma outra forma, para permitir o cálculo do imposto através de uma expressão da forma $y = b(x - q)$ (isto é, primeiro se deduz a parcela $q$ e depois de aplica a alíquota). Converta a tabela acima para este formato (isto é, calcule os valores de $b$ e $q$ para cada faixa de renda).

e) Qual a renda para qual o imposto é igual a R$ 20.000,00?

28. Uma copiadora publicou a seguinte tabela de preços:

| Número de cópias de um mesmo original | Preço por cópia |
|---|---|
| de 1 a 9 | R$ 0,10 |
| de 20 a 49 | R$ 0,08 |
| 50 ou mais | R$ 0,06 |

a) Esboce o gráfico da função que associa a cada natural $n$ o custo de $n$ cópias de um mesmo original.

b) O uso da tabela acima provoca distorções. Aponte-as e sugira uma tabela de preços mais razoável.

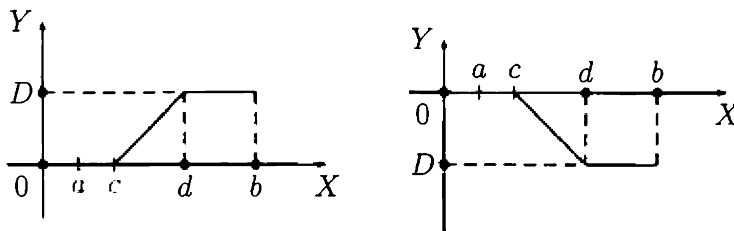
29. Resolva as seguintes equações:

a) $|x - 2| - 2x - 1$;

b) $|3x - 6| = x + 3$;

c) $|x - 2| = x \quad 3$.

30. Chama-se de *função rampa* a uma função poligonal $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, cujo gráfico é de uma das formas abaixo:




isto é, $f$ tem dois patamares $[a, c]$ e $[d, b]$, onde assume, respectivamente, os valores 0 e $D$, ligados por uma rampa.

a) Mostre que toda função rampa pode ser escrita na forma

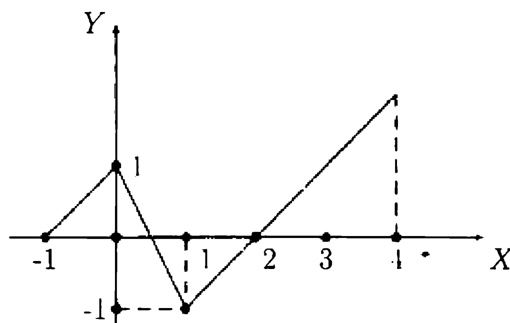
$$f(x) = \frac{\alpha}{2}[(d - c) + |x - c| - |x - d|],$$

para todo $x \in [a, b]$, onde

$$\alpha = \frac{D}{d - c}$$

é a inclinação da rampa.

b) Mostre que toda função poligonal definida em um intervalo $[a, b]$ pode ser expressa como uma soma de uma função contraste (que pode ser vista como uma função rampa de inclinação zero) com um número finito de funções rampa. Escreva nesta forma a função poligonal cujo gráfico é dado abaixo




c) Conclua que toda função poligonal definida em um intervalo $[a, b]$ pode ser escrita na forma

$$f(x) = A + \alpha_1|x - a_1| + \alpha_2|x - a_2| + \cdots + \alpha_n|x - a_n|,$$

para todo $x \in [a, b]$, onde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ São as abscissas dos vértices da poligonal. Escreva nesta forma a função poligonal cujo gráfico é dado acima.

31. Dadas as progressões aritméticas

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \text{ e } (b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots),$$

mostre que existe uma, e somente uma, função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2, \ldots, f(a_n) = b_n, \ldots$

32. $A$ e $B$ são locadoras de automóvel. $A$ cobra 1 real por quilômetro rodado mais uma taxa de 100 reais fixa. $B$ cobra 80 centavos por quilômetro rodado mais uma taxa de 200 reais, Discuta a vantagem de $A$ sobre $B$ ou de $B$ sobre $A$ em função do número de quilômetros a serem rodados.

33. Defina uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pondo $f(x) = 2x$ se $x$ é racional e $f(x) = 3x$ se $x$ é irracional. Mostre que se tem $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$ mas $f$ não é linear.

34. Prove que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3x + \operatorname{sen}(2\pi x)$, é crescente e, para todo $x \in \mathbb{R}$ fixado, transformada a progressão aritmética $x, x+1, x+2, \ldots$ numa progressão aritmética. Entretanto, $f$ não é afim. Por que isto não contradiz o fato provado no final de seção 4 (pág. 102)?

## 5.2 Soluções

1. Menor do que o dobro, pois na segunda metade da corrida não foi cobrada a bandeirada. Algebricamente: se $f(x) = ax+b$ então $f(2x) = 2ax+b$ enquanto $2 \cdot f(x) = 2ax + 2b$.

2. Ao dizer que "a escala é linear", estamos afirmando que há deslocamentos iguais ao longo da linha correspondente acréscimos iguais nos números acima dessa linha. Se $x$ é a distancia de um ponto ao extremo esquerdo da linha e $f(x)$ é o número acima desse ponto, então $f(x) = ax+b$. Como $f(0) = 17$ e $f(8) = 59$, temos $b = 17$ e $8a+17 = 59$, donde $a = 5,25$. Portanto $f(3) = 3 \times 5,25+17 = 32,75$.

3. Temos $N = aC + b$. Sabemos que $0 = 18a + b$ e $100 = 43a + b$. Logo $a = 4$ e $b = -72$. Segue-se que $N = 4C - 72$. Daí $C = 100 \Rightarrow N = 328$.

4. O volume $V(t)$ de água na caixa no instante $t$ é $V(t) = 1000 - at$. sabemos que $V(6) = 850$, logo $1000 - 6a = 850$ e daí $a = 25$. Portanto $1000 - 25t = 500 \Rightarrow t = 20$, ou seja, a água ficará pela metade após 20 horas, o que ocorrerá às 8 da manhã do dia seguinte.

5. Podemos imaginar que o garoto começou com palito (vertical) e, para cada quadrado que armou, precisou de 3 palitos, logo, para fazer $n$ quadrados ele precisou de $3n+1$ palitos. Alternativa: ele usou 4 palitos para fazer o primeiro quadrado e mais 3 para fazer cada quadrado subseqüente. Assim, $n$ quadrados requererão $4 + 3(n-1) = 3n + 1$ palitos.

6. a) Um operário, trabalhando as mesmas 8 horas diárias, construiria o mesmo muro em $5 \times 3 = 15$ dias, logo 5 operários, em iguais condições, fariam o mesmo serviço em $15 \div 5 = 3$ dias. Se o muro tivesse 15 metros, esses mesmos 5 operários, nas mesmas condições, terminariam o trabalho em $(3/36) \times 15 = 5/4$ dias. Finalmente. esses 5 operários, trabalhando 6 horas por dia (em vez de 8) completariam o muro de 15 metros em $\frac{5}{4} + \frac{8}{6} = \frac{5}{3}$ dias (1 dia e 4 horas).

   b) As hipóteses utilizadas implicitamente acima foram de que o tempo necessário para fazer o muro é diretamente proporcional ao número de operários e ao número de horas diárias de trabalho.

c) $D = k \cdot \frac{C}{N \cdot H}$, onde $k$ é a constante de proporcionalidade. Sabemos que, pondo $C = 36$, $N = 3$ e $H = 8$, temos $D = 5$. Então $5 = k \cdot \frac{36}{3 \cdot 8}$, donde $k = \frac{10}{3}$. Portanto, a fórmula procurada é $D = \frac{10}{3} \cdot \frac{C}{N \cdot H}$.

7. a) $F = k \cdot m_1 m_2 / d^2$

   b) $pv = c \cdot t$

   c) $r = k \cdot l/s$

   d) $\Delta l = k \cdot l \cdot \Delta t$

8. Temos $Y = k/X$, onde $k$ é a constante de proporcionalidade. Seja $X' = \frac{125}{100} X = \frac{5}{4} X$. Então $Y' = \frac{k}{X'} = \frac{4}{5} Y = 80\%$ de $Y$. Logo $Y$ sofre um decréscimo percentual de 20%.

9. A função afim a que se refere o enunciado é $f(x) = a_1 + (n-1)r$, onde $r$ é a razão de P.A., mas o exercício não precisa desta fórmula para ser resolvido. basta saber que $f$ existe.

   a) Esse trapézio tem altura 1 e base média $a_i$, logo sua área é $1 \cdot a_i = a_i$.

   b) $a_1 + \cdots + a_n$ é a área desse trapézio maior porque ele é a justaposição dos trapézios de altura 1 considerados no ítem anterior.

   c) $\frac{a_1 + a_n}{2}$ é a base média do trapézio maior porque

$$\frac{a_1 + a_n}{2} = \frac{f(1) + f(n)}{2} = \frac{f(1 - \frac{1}{2}) + f(n + \frac{1}{2})}{2}$$

   pois a função afim $f$ tem a propriedade $f(x-h) + f(x'+h) = f(x) + f(x')$. Como a altura desse trapézio é $n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = n$, o resultado segue-se.

10. Seja $d$ o número de degraus de escada, a qual sobe com a velocidade de $s$ segundos para cada degrau. ficando parada, a pessoa leva $ds$ segundos para subir a escada. Logo, pelos dados do problema, $(d-5)s = 30$ e $(d-10)s = 20$. Assim $s = \frac{30}{d-5} = \frac{20}{d-10}$ e daí $30d - 300 = 20d - 100$ o que resulta em $d = 20$. A escada tem 20 degraus, gasta $s = 20/(d-10) = 20/10 = 2$ segundos para subir cada degrau. logo, o tempo normalmente gasto no percurso é de $2 \times 20 = 40$ segundos.

11. Na 5ª loja, Augusto gastou metade do que tinha e ainda sobravam 22 reais. Logo entrou na 5ª loja com 44 reais. Ao entrar na 4ª loja, ele tinha 88 reais;

na 3ª tinha 176; na 2ª, ~~326~~, na 1ª 704. Augusto começou as compras com R\$ 704,00. (Supondo um só estacionamento para todas as lojas. Caso pagasse o estacionamento após cada compra a resposta seria R\$ 764,00.)

12.

13. $25 + x + x = 95$, $x = 35$, $25 + 35 = 60$. Com 60 anos.

14. A média antes da prova final é $(4 \cdot 2 + 6 \cdot 3)/5 = 5,2$. A nota $n$ que ele precisa tirar satisfaz $(5,2 \cdot 3 + n \cdot 2)/5 \geq 5$. Daí, $n \geq 4,7$.

15. Sejam $A$, $B$ e $C$ respectivamente o número de reais que Arnaldo, Beatriz e Carlos possuíam. Foram feitas 3 transferências. Após a primeira, as quantias com que eles ficaram (sempre na ordem alfabética) foram $A - B - C$, $2B$, $2C$. Após da segunda operação: $2A - 2B - 2C$, $2B - (A - B - C) - 2C$, $4C$, ou seja: $2A - 2B - 2C$, $3B - A - C$, $4C$. E, no final: $4A - 4B - 4C$, $6B - 2A - 2C$, $4C - (2A - 2B - 2C) - (3B - A - C)$, isto é: $4A - 4B - 4C$, $6B - 2A - 2C$ e $7C - A - B$. Agora é só resolver o sistema:

$$\begin{cases} 4A - 4B - 4C = 16 \\ -2A + 6B - 2C = 16 \\ -A - B + 7C = 16 \end{cases}$$

o que nos dá $A = 26$ reais, $B = 14$ reais e $C = 8$ reais.

Fazer também a solução via "trás-pra-diante", como no Exercício 5.11.

16. Sejam $v$ a velocidade do carro que sai de $A$ e $w$ a velocidade do carro que sai de $B$ (medidas em metros p/minuto). Após $t$ minutos de viagem eles se encontram a 720m de $A$. Então $vt = 720$ e, chamando de $d$ a distancia entre $A$ e $B$, temos (com o mesmo $t$) $wt = d - 720$. Eliminando $t$, vem: $\frac{v}{w} = \frac{720}{d-720}$. Seja $t'$ o tempo decorrido desde o inicio do percurso até o segundo encontro dos carros. Levando em conta os 10 minutos em que cada carro esteve parado, temos $v(t' - 10) = d + 400$ e $w(t' - 10) = 2d - 400$. Dividindo membro a membro estas duas igualdades resulta $\frac{v}{w} = \frac{d+400}{2d-400}$. Comprovando, obtemos $\frac{720}{d-720} = \frac{d+400}{2d-400}$. Segue-se imediatamente que $d = 1760$.

17. Seja $t$ mínimo do tempo gasto pelo pedestre para ir de $A$ a $B$. Até chegar a $B$, ele foi ultrapassado por 16 trens (contando com o último, que chegou junto com ele). Este último trem saiu de $A$ $16 \times 3 = 48$ minutos após o pedestre,

logo levou $t - 48$ minutos para ir de $A$ a $B$. Sejam $v$ a velocidade do pedestre e $w$ a dos trens. Então $w(t-48) = vt = 3km$.

Por outro lado, o primeiro trem que cruzou com o pedestre (na direção contraria) saiu de $B$ $22 \times 3 = 66$ minutos antes do trem que estava saindo de $B$ no momento em que chegava o pedestre. Logo, o tempo que aquele primeiro trem gastou para ir dde $B$ a $A$ foi $66 - t$ minutos. (Saiu há 66 minutos mas já chegou há $t$ minutos.) Então $w(66-t) = vt = 3km$.

Assim, $t - 48 = 66 - t$, donde $t = 57$ minutos e $t - 48 = 9$ minutos. Como $w(t-48) = 3km$, segue-se que $w = \frac{1}{3}\frac{km}{min} = 20km/h$. A velocidade dos trens é, portanto, $20km$ por hora. A velocidade do pedestre é $v = 3/t = \frac{3}{57}km$ por minuto, ou seja $\frac{180}{57}km/h = \frac{60}{19}\frac{km}{hora}$.

18. a) Desloque o gráfico uma unidade para baixo.

    b) Idem uma unidade para a direita.

    c) Imagem refletida do gráfico em torno do eixo $Y$.

    d) Duas semi-retas com origem no ponto $(1,-2)$. Uma passa pelo ponto $(0,2)$ e a outra por $(2,0)$.

    e) Duas semi-retas com origem no ponto $(\frac{1}{2},-1)$. Uma passa por $(0,1)$ e a outra por $(2,0)$.

    f) Uma figura $W$, formada a partir do gráfico de $f$, refletindo a parte que tem $y < 0$ em torno do eixo $X$.

    g) A parte do gráfico que se tem $x > 0$ mais a reflexão dessa mesma parte em torno do eixo $Y$.

    h) O gráfico de $f$, com a parte que tem $y < 0$ substituída pelo intervalo $[\frac{1}{2},2]$ do eixo $X$.

19. a) $\emptyset$; b) $\mathbb{R}$; c) $x < 8/3$; d) $x > 1$; e) $x \in \{1,3\}$; f) $-\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$; g) $x = \pm\frac{3}{2}$; h) $x \in [\frac{1}{2},1] \cup [\frac{3}{2},+\infty)$

20. $x \in [0,1) \cup (-\infty,-\frac{1}{2})$.

21. $[8/3,+\infty)$

22. a) O ângulo reto com vértice no ponto $(\frac{3}{2},\frac{5}{2})$ e lados passando pelos pontos $(-1,0)$ e $(4,0)$.

b) As semi-retas horizontais $S = \{(x, -2); x \leq -1\}$ e $S' = \{(x, 2); x \geq 1\}$, justamente com o segmento de reta que liga os pontos $A = (-1, -2)$ a $B = (1, 2)$, os quais são as origens dessas semi-retas.

23. a) O quadrado cujos vértices são os pontos $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (-1, 0)$ e $D = (0, -1)$.

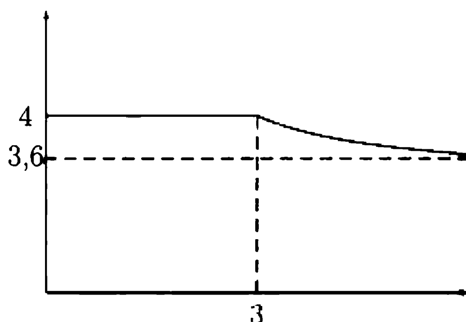
b) As duas retas $y = x + 1$ e $y = x - 1$.

24. a) No intervalo $[0, 3)$, o gráfico coincide com o da função $y = 4x$. No intervalo $[3, +\infty)$, o gráfico é o da função $y = 3,6x$.

b) Se $f(x)$ é o preço de $x$ quilos, pede-se o gráfico da função $m(x) = f(x)/x$. Para $0 \leq x < 3$, $m(x)$ é constante, igual a 4, e para $x \geq 3$, (pois $x' > 3$) portanto $f(x') = 4x = f(x)$.

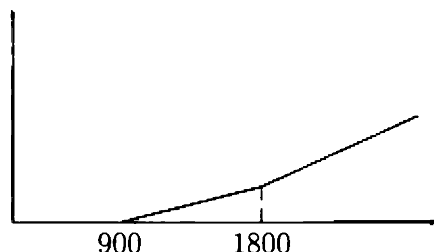
25. a) O consumidor paga 12 reais pelos três primeiros quilos e 3,6 reais por cada quilo a seguir. Se $f(x)$ é o preço de $x$ quilos então $f(x) = 4x$ para $0 \leq x \leq 3$ 3 $f(x) = 12 + 3,6(x - 3)$ para $x > 3$.

b) $f(x)/x = 4$ para $0 < x \leq 3$ e $\frac{1,2+3,6x}{x} = 3,6 + \frac{1,2}{x}$ para $x > 3$.




c) $12 + 3,6(x - 3) = 15 \Rightarrow x = 3,83$ kg.

26. Se $f(x)$ é o imposto a pagar para uma base de cálculo de $x$ reais temos $f(x) = 0$ se $0 \leq x \leq 900$, $f(x) = 0,15x - 135$ para $900 < x \leq 1800$ e $f(x) = 0,25x - 315$ para $x > 1800$.




27. a) As parcelas a deduzir são 0, 1320, 3207, 6 e 17468, 1.

b) $0,26 \cdot 5000 = 1300$.

c) Não.

d) Em cada faixa de renda, devemos ter $ax - p = b(x - q) = bx - bq$, para todo $x$. Ou seja: $b = a$ e $q = \frac{p}{a}$. Assim:

- Até 8800: $b = 0$, $q$ arbitrário
- De 8800 a 17160: $b = 15\%$, $q = 8800$
- De 17160 a 158450: $b = 26\%$, $q = 12336,92$
- Mais de 158450: $b = 35\%$, $q = 49908,86$

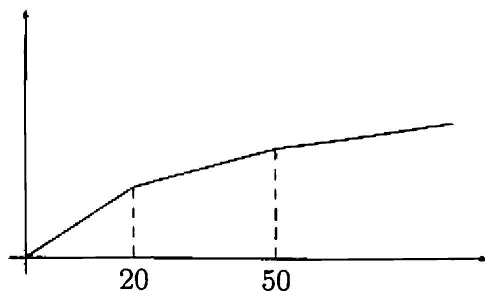
e) Inicialmente, calculamos o IR nos pontos de mudança de faixa:

| Renda | I.R |
|---|---|
| 8800 | 0 |
| 17160 | 1254,24 |
| 158450 | 37983,40 |

Logo, um IR igual a R$ 20.000,00 é pago na faixa de tributação de 17160 a 158450. A renda correspondente satisfaz $0,26x - 3207,60 = 20000$, ou seja, é igual a R$ 89.260,00.

28. a)

$$\begin{cases} 0,10n, & \text{se } 1 \le n \le 19; \\ 0,08n, & \text{se } 20 \le n \le 49; \\ 0,06n, & \text{se } n \ge 50. \end{cases}$$




b) A distorção consiste no fato de que é mais barato fazer, por exemplo, 20 cópias (R$ 1,60) do que 19 cópias (R$ 1,90), Uma escala mais razoável seria:

- 0,10 por cópia, pelas primeiras 19 cópias.
- 0,08 por cópia adicional, até 49 cópias.
- 0,06 por cópia adicional, a partir da 50ª cópia.

**Nota:** Estamos substituindo o exercício 5.29 por este outro, que aparecera a partir da 9ª edição com o enunciado abaixo:

29. a) Procuremos, separadamente, as soluções $\geq 2$ e as $x \leq 2$. Se $x \geq 2$ a equação dada é $x - 2 = 2x - 1$, logo $x = -1$. Portanto não há soluções $x \leq 2$. Se $x \leq 2$ então temos $2 - x = 2x - 1$, logo $x = 1$, que é menor do que 2. Portanto a solução é $x = 1$.

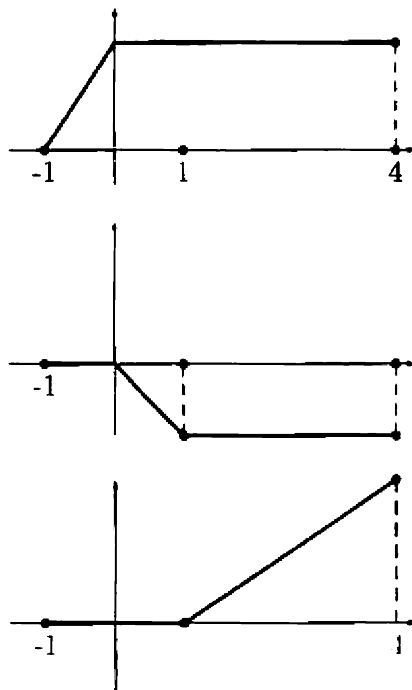
b) Novamente, separamos os casos. Se $3x - 6 \geq 0$ (isto é, se $x \geq 2$) então a equação é $3x - 6x + 3$, donde $x = 4,5$, uma boa solução. Se $3x - 6 \leq 0$ (ou seja, $x \leq 2$) então ficamos com $6 - 3x = 3$, donde $x = 3/4$, que também serve, pois $3/4 < 2$. Portanto a equação dada admite duas raízes: $9/2$ e $3/4$.

c) Se $x \geq 2$ então temos $x - 2 = x - 3$, sem solução. Se $x \leq 2$, ficamos com $2 - x = x - 3$ e daí $x = 2,5$, que é maior do que 2. Logo a equação dada não tem raízes.

30. a) Se $a \leq x \leq c$, $f(x) = \frac{\alpha}{2}[d - c - x + c + x - d] = 0$.
Se $c \leq x \leq d$, $f(x) = \frac{\alpha}{2}[d - c + x - c + x - d] = \alpha(x - c)$
Como $f(d) = D$ temos $\alpha(d - c) = D$, ou seja, $\alpha = \frac{D}{d-c}$.
Se $d \leq x \leq b$, $f(x) = \frac{\alpha}{2}[d - c + x - c - x + d] = \alpha(d - c) = D$.

O segundo caso é análogo.

b) Se a função poligonal $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é afim em cada um dos intervalos $[t_{i-1}, t_i]$, com $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, afirmamos que $f = c + \varphi_1 + \cdots + \varphi_n$, onde $c = f(a)$ e cada $\varphi_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ é a função-rampa igual a zero no intervalo $[a, t_{i-1}]$ e igual a $f(t_i) - f(t_{i-1})$ no intervalo $[t_i, b]$. No caso da função $f$ cujo gráfico é a Figura 24, temos $c = 0$ e $f = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$, onde as funções-rampa $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ têm os seguintes gráficos:




c) A primeira observação resulta imediatamente dos ítem a) e b). Quanto à função $f$ da Figura 24, o ítem a) nos diz que

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}(1 + |x+1| - |x|)$$
$$\varphi_2(x) = \frac{1}{2}(1 + |x| - |x-1|)$$
$$\text{e} \quad \varphi_3(x) = \frac{1}{2}(1 + |x-1| - |x-4|)$$

Portanto

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) = \frac{1}{2}(3 - 2|x| + 2|x-1| + |x+1| - |x-4|)$$

31. Seja $f(x) = \frac{r_b}{r_a}x + b_1 - \frac{r_b}{r_a}a_1$, sendo $r_a$ e $r_b$ as razões das progressões $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$, respectivamente. A função $f$ é afim e $f(a_n) - \frac{r_b}{r_a}a_n + b_1 - \frac{r_b}{r_a}a_1 = \frac{r_b}{r_a}(a_n - a_1) + b_1 = \frac{r_b}{r_a}[(n-1)r_a] + b_1 = b_1 + (n-1)r_b = b_n$.

    A unicidade é obvia pois só existe uma função afim $f$ tal que $f(a_1) = b_1$ e $f(a_2) = b_2$.

32. Para $x$ quilômetros, $A$ cobra $100 + x$ reais e $B$ cobra $200 + 0,8x$ reais. O preço de $B$ será menor que o de $A$ para $200 + 0,8x < 100 + x$, ou seja, para $x > 500$.

    Para quilometragem superior a 500km, $B$ é mais vantajosa.

    Para quilometragem inferior a 500km, $A$ é mais vantajosa.

33. A afirmacão feita decorre o fato de que, para $n \in \mathbb{Z}$, tem-se $n \cdot x$ racional se, e somente se, $x$ é racional. Evidentemente, a função $f$ não é monótona.

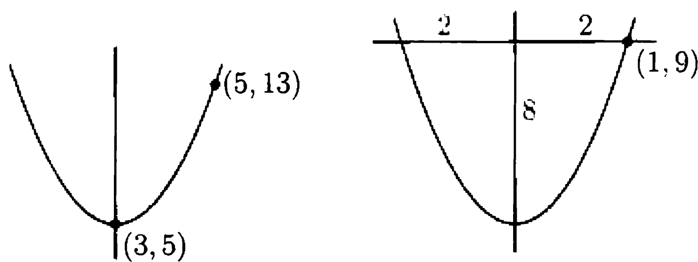
34. Para todo $x \in \mathbb{R}$, como $\operatorname{sen}[2\pi(x+1)] = \operatorname{sen}(2\pi x)$, segue-se que $f(x+1) - f(x) = 7$, portanto a seqüencia $f(x), f(x+1), \ldots, f(x+n), \ldots$ é uma progressão aritmética de razão 7. A maneira mais rápida de ver que $f$ é crescente é usar o Cálculo Diferencial. A derivada de $f$ é $f'(x) = 7 + 2\pi \cdot \cos(\pi x)$. Como $|2\pi \cdot \cos(\pi x)| \leq 2\pi < 7$, tem-se $f'(x) > 0$ para todo $x$, logo $f$ é crescente.

# CAPÍTULO 6

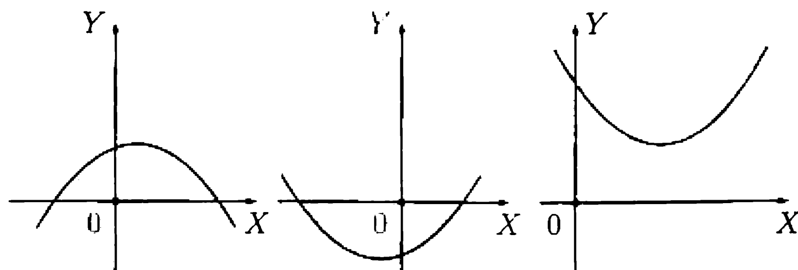
## Funções Quadráticas

### 6.1 Exercícios

1. Encontre a função quadrática cujo gráfico é dado em cada figura abaixo:




2. Identifique os sinais de $a$, $b$ e $c$ nos gráficos de funções quadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$ dados abaixo:

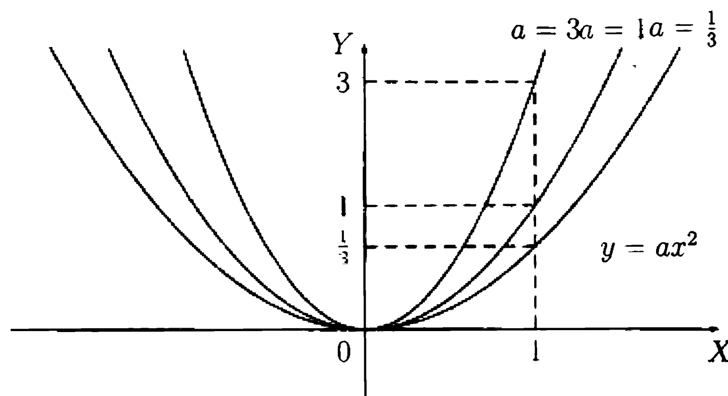



3. Escreva cada uma das funções quadráticas abaixo na forma $f(x) = a(x-m)^2 + k$. A seguir, calcule suas raízes (se existirem), o eixo de simetria de seu gráfico e seu valor mínimo ou máximo

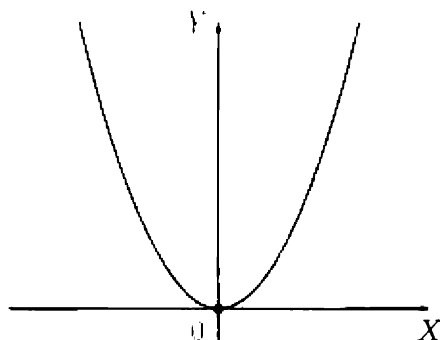
   a) $f(x) = x^2 - 8x + 23$

   b) $f(x) = 8x - 2x^2$

4. Observe os gráficos abaixo, que representam as parábolas $y = ax^2$ para diversos valores de $a$. estas parábolas são semelhantes entre si?




5. Encontre a unidade que deve ser usada nos eixos cartesianos de modo que a parábola abaixo seja o gráfico da função $f(x) = 2x^2$




6. Encontre os valores mínimo e máximo assumidos pela função $f(x) = x^2 - 4x + 3$ em cada um dos intervalos abaixo:

   a) $[1, 4]$
   b) $[6, 10]$

7. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$.

   a) Mostre que
   $$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$
   b) Mais geralmente, mostre que se $0 < \alpha < 1$, então
   $$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$$
   Interprete geometricamente esta propriedade.

8. Prove que se $a$, $b$ e $c$ são inteiros ímpares, as raízes de $y = ax^2 + bx + c$ não são racionais.

9. Uma pessoa possui um gravador de vídeo dotado de um contador que registra o número de voltas dadas pelo carretel da direita. A fita, de 6 horas de duração, está parcialmente gravada. O contador indica 1750 ao final do trecho gravado e 1900 ao final da fita. o problema é saber quanto tempo de gravação ainda está disponível no final da fita.

   a) Explique porque não é razoável supor que o tempo de gravação seja proporcional ao numero de voltas no contador.

b) Considerando que a fita se enrola em cada carretel segundo círculos concêntricos igualmente espaçados, mostre que o tempo $T(n)$ de gravação após $n$ voltas é dado por uma função da forma $T(n) = an^2 + bn$.

c) Medindo o tempo de gravação correspondente às primeiras 100, 200, 300 e 400 voltas, foram encontrados os dados abaixo. Estes valores são consistentes com o modelo acima?

| Volta | Tempo(s) |
|---|---|
| 100 | 555 |
| 200 | 1176 |
| 300 | 1863 |
| 400 | 2616 |

d) Quanto tempo de gravação resta na fita?

10. Dado um conjunto de retas do plano, elas determinam um número máximo de regiões quando estão na chamada posição geral: isto é, elas são concorrentes duas a duas e três retas nunca têm um ponto comum. Seja $R_n$ o número máximo de regiões determinadas por $n$ retas do plano.

    a) Quando se adiciona mais uma reta na posição geral a um conjunto de $n$ retas em posição geral, quantas novas regiões são criadas?

    b) Deduza de a) que $R_n$ é dada por uma função quadrática de $n$ e obtenha a expressão para $R_n$.

11. No máximo quantos pontos de intersecção existem quando são desenhadas $n$ circunferências?

12. Um estudante anotou, ao longo do tempo, de um móvel sujeito a uma força constante e obteve os dados abaixo:

| Instante (seg) | Posição (metros) |
|---|---|
| 0 | 17 |
| 10 | 45 |
| 20 | 81 |

Calcule a posição do móvel nos instantes 5 seg, 15 seg e 25 seg.

13. O motorista de um automóvel aplica os frios de modo suave e constante, de modo a imprimir uma força de frenagem constante a seu veículo, até o repouso.

o diagrama a seguir mostra a posição do veiculo a cada segundo a partir do instante em que os freios foram aplicados.




a) Os dados acima são compatíveis com o fato que a força de frenagem ser constante?

b) Qual a posição do veiculo 5s após o inicio da frenagem?

c) Quanto tempo o veiculo demora para chegar ao repouso?

d) Qual era a velocidade do veiculo no instante em que o motorista começou a aplicar os freios?

14. Um grupo de alunos, ao realizar um experimento no laboratório de Física, fez diversas medidas de um certo comprimento. O instrutor os orientou no sentido de tomar a média aritmética dos valores encontrados como o valor a ser adotado. Este procedimento pode ser justificado do modo abaixo.

Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n$ os valores encontrados. É razoável que o valor adotado $x$ seja escolhido de modo que o erro incorrido pelas diversas medições seja o menor possível. Em geral, este erro é medido através do chamado desvio quadrático total, definido por

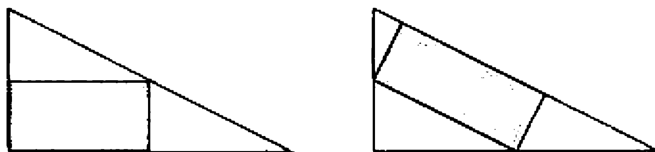
$$d(x) = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \cdots + (x - x_n)^2.$$

a) Mostre que $d(x)$ é minimizado quando

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

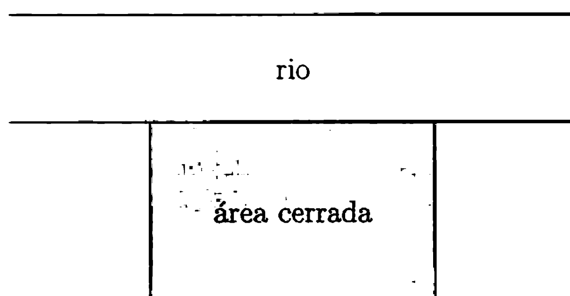
b) Suponha agora que se deseje utilizar o desvio absoluto total $e(x) = |x - x_1| + |x - x_2| + \cdots + |x - x_n|$ como medida do erro cometido. Mostre que $e(x)$ é minimizado quando $x$ é a mediana de $x_1, x_2, \dots, x_n$.

15. Numa vidraçaria há um pedaço de espelho, sob forma de um triângulo retângulo de lados 60cm, 80cm e 1cm. Quer-se, a partir dele, recortar um espelho retangular com a maior área possível. A fim de economizar corte, pelo menos um dos lados do retângulo deve estar sobre um lado do triângulo.



As posições sugeridas são as da figura acima. Em cada caso, determine qual o retângulo de maior área e compare os dois resultados. Discuta se a restrição de um lado estar sobre o contorno do triângulo é realmente necessária para efeito de maximizar a área.

16. Com 80 metros de cerca um fazendeiro deseja circundar uma área retangular junto a um rio para confinar alguns animais.




Quais devem ser as medidas do retângulo para que a área cercada seja a maior possível?

17. No instante $t = 0$ o ponto $P$ está em $(-2, 0)$ e o ponto $Q$ em $(0, 0)$. A partir desse instante, $Q$ move-se para cima com velocidade de 1 unidade por segundo e $P$ move-se para direita com velocidade de 2 unidades por segundo. Qual é o valor da distancia mínima entre $P$ e $Q$?

18. Se $x$ e $y$ são reais tais que $3x+4y = 12$, determine o valor mínimo de $z = x^2+y^2$.

19. Um avião de 100 lugares foi fretado para uma excursão. A companhia exigiu de cada passageiro R$ 800,00 mas R$ 10,00 por cada lugar vago. Para que número de passageiros a rentabilidade da empresa é máxima?

20. João tem uma fábrica de sorvetes. Ele vende, em média, 300 caixas de picolés por R$ 20,00. Entretanto, percebeu que, cada vez diminuía R$ 1,00 no preço da caixa, vendia 40 caixas a mais. Quanto ele deveria cobrar pela caixa para que sua receita fosse máxima?

21. Uma loja está fazendo uma promoção na venda de balas: "Compre $x$ balas e ganhe $x\%$ de desconto". A promoção é valida para compras até 60 balas, caso em que é concedido o desconto máximo 60%. Alfredo, Beatriz, Carlos e Daniel compraram 10, 15, 30 e 45 balas, respectivamente. Qual deles poderia ter comprado mais balas e gasto a mesma quantia, se empregasse melhor seus conhecimentos de Matemática?

22. O diretor de uma orquestra percebeu que, com o ingresso a R$ 9,00, em média 300 pessoas assistem aos concertos e que para cada redução de R$ 1,00 no preço dos ingressos, o publico aumenta em 100 espectadores. Qual deve ser o preço do ingresso para que a receita seja máxima?

23. Qual o valor máximo de $21n - n^2$, $n$ inteiro?

24. Faça o gráfico de

    a) $f(x) = |x^2| - |x| + 1$

    b) $f(x) = |x^2 - x|$

25. Identifique o conjunto dos pontos $(x, y)$ tais que:

    a) $x^2 - 5x + 6 - 0$

    b) $y = x^2 \quad 5x + 6$

26. Resolva a inequação $x^4 + x^2 - 20 > 0$

27. Determine explicitamente os coeficientes $a$, $b$, $c$ do trinômio $f(x) = ax^2 + bx + c$ em função dos valores $f(0)$, $f(1)$ e $f(2)$.

28. Um restaurante a quilo vende 100 kg de comida por dia, a 12 reais o quilo. Uma pesquisa de opinião revelou que, por cada real aumento no preço, o restaurante perderia 10 clientes, com um consumo médio de 500g cada. Qual deve ser o valor do quilo da comida para que o restaurante tenha a maior receita possível?

29. Um prédio de 1 andar, de forma retangular, com lados proporcionares a 3 e 4, vai ser construído. O imposto predial é de 7 reais por metro quadrado, mais uma taxa fixa de 2.500 reais. A prefeitura concede um desconto de 60 reais por metro linear do perímetro, como recomenda pela iluminação externa e pela calçada em volta do prédio. Qual devem ser as medidas dos lados para que o imposto seja o mínimo possível? Qual o valor desse imposto mínimo? Esboce o gráfico do valor do imposto como função do lado maior do retângulo.

30. determine entre os retângulos de mesma área $a$, aquele que tem o menor perímetro. Existe algum retângulo cujo perímetro seja maior do que os de todos os demais com mesma área?

31. Que forma tem o gráfico da função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \sqrt{x}$?

32. Mostre que a equação $\sqrt{x} + m - x$ possui uma raiz de $m > 0$, duas raízes quando $-1/4 < m \leq 0$, uma raiz para $m = -1/4$ e nenhuma raiz caso $m < -1/4$.

33. Numa concorrência publica para a contração de uma pista circular de patinação apresentam-se as firmas $A$ e $B$. A firma $A$ cobra 20 reais por metro quadrado de pavimentação, 15 reais por metro linear do cercado, mais uma taxa de 200 reais para administração. Por sua vez, a firma $B$ cobra 18 reais por metro quadrado de pavimentação, 20 reais por metro linear do cercado e taxa de administração de 600 reais. Para quais valores do diâmetro da pista a firma $A$ é mais vantajosa? Esboce um gráfico que ilustre a situação. Resolva um problema análogo com os números 18, 20 e 400 para $A$ e 20, 10, 150 para $B$.

34. Dados $a$, $b$, $c$ positivos, determinar $x$ e $y$ tais que $xy = c$ e que $ax + by$ seja o menor possível.

35. Cavar um buraco retangular de 1m de largura de modo que o volume cavado seja 300m$^3$. Sabendo que casa metro quadrado de área cavada custa 10 reais e cada metro de profundidade custa 300 reais, determinar as direções do buraco de modo que o seu custo seja mínimo.

36. Dois empresários formam uma sociedade cujo capital é de 100 mil reais. Um deles trabalha na empresa três dias por semana e o outro 2. Após um certo tempo, vendem o negocio e cada um recebe 99 mil reais. Qual foi a contribuição de cada um para formar a sociedade?

37. Nas águas paradas de um lago, Marcelo rema seu barco a 12 km por hora, Num certo rio, com o mesmo barco e as mesmas remadas, ele percorreu 12 km a favor da corrente e 8 km contra a corrente, num tempo total de 2 horas. Qual era a velocidade do rio, quanto ele levou para ir e quanto tempo para voltar?

38. Os alunos de uma turma fizeram uma coleta para juntar 405 reais, custo de uma excursão. Todos contribuíam igualmente. Na última hora, dois alunos desistiram. Com isso, a parte de cada um sofreu um aumento de um real e vinte centavos, quantos alunos tem a turma?

39. Prove que a função continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é quadrática se, e somente se, para todo $h \in \mathbb{R}$ fixado, a função $\varphi(x) = f(x+h) - f(x)$ é afim e não-constante.

40. Olhando o gráfico da função quadrática $f(x) = x^2$, vê-se que ele parece uma parábola. Se for, quais serão o foco e a diretriz? Por simetria, o foco deve ser $F = (0, t)$ e a diretriz deve ser a reta $y = -t$. Use a definição de parábola para mostrar que $t = 1/4$.

## 6.2 Soluções

1. A função procurada é $f(x) = a(x - m)^2 + k$. Cabe-nos achar os valores de $a$, $m$ e $k$ usando os dados da figura. Em primeiro lugar, a ordenada do vértice da parábola é $9 - 8 = 1$, logo $f(x) = a(x - m)^2 + 1$. Como a figura é o gráfico de uma função quadrática, o eixo da parábola é paralelo ao eixo $y$ do sistema de coordenadas que está subentendido no enunciado do problema. Assim, num novo sistema de coordenadas $(X, Y)$ onde o eixo $Y$ coincide com o eixo da parábola e o vértice da mesma tem coordenadas $(0, 0)$, a equação da parábola será $Y = aX^2$, com o mesmo coeficiente $a$. Pela figura, vemos que $X = 2 \Rightarrow Y = 8$ logo $8 = a \cdot 2^2$ e daí $a = 2$. Assim, a função que buscamos é do tipo $f(x) = 2(x - m)^2 + 1$. Olhando novamente para a figura como gráfico de $f$ no sistema de coordenadas original, vemos que $f(1) = 9$. Isto nos diz que $2(1 - m)^2 + 1 = 9$. Esta equação mostra que $m = 3$ ou $m = -1$. Mas $m$ é a abscissa do vértice, o que está à esquerda do ponto $(1, 9)$. Logo deve ser $m = -1$. Mas $m$ é abscissa do vértice, o qual está à esquerda do ponto $(1, 9)$. Logo deve ser $m = -1$. Assim, a função quadrática procurada é $f(x) = 2(x+1)^2 + 1$, ou seja, $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$.

2. $a_1 < 0$, $a_2 > 0$ e $a_3 > 0$ pois a primeira está com a concavidade para baixo as outras estão com a concavidade volta para cima. $c_1 > 0$, $c_2 < 0$ e $c_3 > 0$ pois $c = f(0)$ e a primeira e a terceira parábola cortam o eixo vertical em sua parte positiva e a segunda o faz na parte negativa. Como a abscissa do vértice é $-\frac{b}{2a}$, $a$ e $b$ têm sinais iguais quando a abscissa do vértice é negativa e têm sinais contrários quando a abscissa do vértice é positiva. Portanto $a$ e $b$ têm sinais contrários na primeira e na terceira parábola e têm sinais iguais na segunda parábola. Logo, $b_1 > 0$, $b_2 > 0$ e $b_3 < 0$.

3. a) $f(x) = x^2 - 8x + 23 = x^2 - 8x + 16 + 7 = (x-4)^2 + 7$. Não há raízes reais, o eixo de simetria é a reta $x = 4$ e o valor mínimo é 7.

   b) $f(x) = 8x - 2x^2 = -2(x^2 - 4x) = -2(x^2 - 4x + 4 - 4) = 2[(x-2)^2 - 4] = -2(x-2)^2 + 8$. O eixo de simetria é a reta $x = 2$, o valor máximo é 8 e as raízes são os valores para os quais $(x-2)^2 = 4$, ou seja, $x - 2 = \pm 2$. As raízes são $x_1 = 4$ e $x_2 = 0$.

4. Uma homotesia (semelhança) de razão $k$ (e centro na origem) transforma o ponto $(x, y)$ no ponto $(X, Y) = (kx, ky)$ e transforma a parábola $y = ax^2$ na parábola $\frac{y}{k} = \left(\frac{x}{k}\right)^2$, ou seja, $Y = \frac{a}{k}X^2$. Portanto, as parábolas $y = ax^2$ e $y = a_1x^2$ são semelhantes e a razão de semelhança é $k$ tal que $a_i = \frac{a}{k}$, ou seja, $k = \frac{1}{a_1}$. Logo, as parábolas do problema são semelhantes entre si. Como qualquer parábola pode ter equação da forma $y = ax^2$, bastando para isso escolha convenientemente o sistema de eixos, conclui-se que quaisquer duas parábolas são semelhantes entre si.

5. Trace a bissetriz do primeiro quadrante. Isso pode ser feito porque não depende da escala dos eixos. O ponto de intersecção (distinto da origem) da bissetriz com a parábola é $(0,5; 0,5)$. Dobre a abscissa desse ponto e você obterá a unidade procurada.

6. O vértice da parábola $y = x^2 - 4x + 3$ é $(2, -1)$, que corresponde ao ponto mais baixo do gráfico. É claro que quando mais afastado do vértice estiver um ponto, mais alto ele estará.

   Em $[1, 4]$, o mínimo ocorre em $x = 2$ e é igual a $-1$; o máximo ocorre em $x = 4$ e é igual a $4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 3$.

   Em $[6, 10]$, o mínimo ocorre em $x = 6$ e é igual a $6^2 - 4 \cdot 6 + 3 = 15$; o máximo ocorre em $x = 10$ e é igual a $10^2 - 4 \cdot 10 + 3 = 63$.

7. a) Provemos inicialmene que, se $x_1 \neq x_2$, então $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 < \frac{x_1^2+x_2^2}{2}$. Ora,

$$\frac{x_1^2+x_2^2}{2} - \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 = \frac{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2}{4} = \left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2 > 0$$

se $x_1 \neq x_2$.

Se $x_1 \neq x_2$ e $a > 0$ então

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) =& a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 + b\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \\ &+ c < a\frac{x_1^2+x_2^2}{2} + b\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + c \\ =& \frac{(ax_1^2+bx_1+c)+(ax_2^2+bx_2+c)}{2} \\ =& \frac{f(x_1+x_2)}{2}. \end{aligned}$$

b) Provemos inicialmente que, se $x_1 \neq x_2$ e $0 < \alpha < 1$, então $[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2]^2 < \alpha x_1^2 + (1-\alpha)x_2^2$.

Ora, $\alpha x_1^2 + (1-\alpha)x_2^2 - [\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2]^2 = (\alpha-\alpha^2)x_1^2 - 2\alpha(1-\alpha)x_1x_2 + (\alpha-\alpha^2)x_2^2 = \alpha(1-\alpha)[x_1-x_2]^2 > 0$ se $x_1 \neq x_2$ e $0 < \alpha < 1$.

Se $x_1 \neq x_2$, $0 < \alpha < 1$ e $a > 0$, $f[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] = a[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2]^2 + b[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] + c < a[\alpha x_1^2 + (1-\alpha)x_2^2] + b[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] + c = \alpha a x_1^2 + \alpha b x_1 + \alpha c + (1-\alpha)x_2^2 + (1-\alpha)bx_2 + (1-\alpha)c = \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$.

8. **Solução 1**

Se $a = 2p+1$, $b = 2q+1$ e $c = 2r+1$ então $b^2-4ac = 4q(q+1)-16pr-8p-8r-3$. Observe que $q(q+1)$ é um produto de dois inteiros consecutivos e, de dois inteiros consecutivos, sempre um deles é par. Então $4q(q+1)$ é multiplo de 8. também é multiplo de 8 o número $-16pr-8p-8r$. Logo, $b^2-4ac$ é 3 unidades menor que um múltiplo de 8, ou seja, é um número que dividido por 8 da resto 5. Se um número dividido por 8 der resto 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, seu quadrado dividido por 8 dará resto 0, 1, 4, 1, 0, 1, 4, 1, respectivamente. Nenhum quadrado perfeito dá resto 5 quando dividido por 8. Logo, $b^2-4ac$ não é quadrado perfeito e as raízes não podem ser racionais.

**Solução 2**

Suponhamos que a ecuação $ax^2+bx+c=0$ admita uma raiz racional. Seja $\frac{p}{q}$ a fracção irredutivel que é igual a essa raiz. Como $\frac{p}{q}$ satisfaz a equação,

subsitutindo e simplificando obtemoos $ap^2 + bpq + cq^2 = 0$. Os números $p$ e $q$ não podem ser ambos pares, pois $\frac{p}{q}$ é irreducivel. $p$ e $q$ não podem ser ambos ímpares, pois a soma de três números ímpares, $ap^2 + bpq + cq^2$, não pode ser igual a zero. Então um dos números $p$ e $q$ é par e o outro é ímpar. Nesse caso, duas das parcelas de $ap^2 + bpq + cq^2$ serão pares e a outra será ímpar, o que fará com que a soma seja ímpar. Isso é absurdo pois $ap^2 + bpq + cq^2 = 0$.

9. a) No inicio, quando o carretel da direita está vazio, uma volta é dada em pouco tempo; no final, quando grande parte da fita já está enrolada no carretel da direita, passa-se mais tempo durante uma volta do carretel.

   b) A velocidade $v$ de deslocamento da fita é constante.

   Se a espessura da fita é $c$, os raios (médios) das voltas são $r$, $r+c$, $r+2c, \ldots$ e os comprimentos das voltas são $2\pi r$, $2\pi(r+c)$, $2\pi(r+2c), \ldots$. Os tempos gastos para enrolar essas voltas são $2\pi r/v$, $2\pi(r+c)/v$, $2\pi(r+2c)/v, \ldots$. O tempo total para enrolar as $n$ primeiras voltas é

$$T(n) = \frac{2\pi r}{v} + \frac{2\pi(r+c)}{v} + \frac{2\pi(r+2c)}{v} + \cdots + \frac{2\pi[r+(n-1)c]}{v}$$
$$= \frac{2\pi r}{v}n + \frac{\pi c}{v}n(n-1) = \frac{\pi c}{v}n^2 + \frac{\pi(2r-c)}{v}n,$$

   que é da forma $T(n) = an^2 + bn$.

   c) Se $T(n) = an^2 + bn$ e $T(100) = 555$, $T(200) = 1176$, $T(300) = 1863$ e $T(400) = 2616$, $G(n) = \frac{T(n)}{n} = an + b$ e $G(100) = 5,55$, $G(200) = 5,88$, $G(300) = 6,21$ e $G(400) = 6,54$.

   Os pontos $(100; 5,55)$, $(200; 5,88)$, $(300; 6,21)$ e $(400; 6,54)$ são colineares. Eles pertencem à reta $v = 0,0033x + 5,22$. Então, $a = 0,00033$ e $b = 5,22$. $G(n) = 0,0033n + 5,22$ e $T(n) = 0,0033n^2 + 5,22n$. É claro que houve um pouco de sorte neste exercicio. Na vida real, dificilmente as leituras do contador em instantes prefixados seriam todas números inteiros: haveria erros de contagem de tempo, haveria erros de leitura do contador, inevitaveis no caso de leitura não-inteiras. Apesar de tudo, o modelo $G(n) = an + b$ é adecuado se os pontos forem aproximadamente colineares.

   d) $T(1750) = 19241,25$ e $G(1900) = 21831$. $T(1900) - T(1750) \cong 2590$. A resposta é 2590s, ou seja, um pousco menos de 43min 10s.

10. a) $n + 1$. Cada nova reta que se traça começa criando uma nova reguiao e

cria uma nova regioa após cada intercepção com cada uma das $n$ retas já traçadas.

b) $R_{n+1} = R_n + n + 1$. Como $R_{n+1} - R_n = n + 1$ forma uma progreção aritmética, $R_n$ é dado por uma função polinomial do segundo grau em $n$.

$$\begin{aligned} R_n =& (R_n - R_{n-1}) + (R_{n-1} - R_{m-2}) + \cdots + \\ &+ (R_3 - R_2) + (T_2 - R_1) + R_1 \\ =& n + (n-1) + \cdots + 3 + 2 + R_1 \\ =& \frac{(n+2)(n-1)}{2} + R_1 \\ =& \frac{n^2+n-2}{2} + 2 = \frac{n^2+n+2}{2}. \end{aligned}$$

11. Cada nova circunferência que se traça intercerta cada uma das circunferencias já traçadas em 2 pontos e, após cada interseção com cada uma das $n$ circunferencias já traçadas, cria uma nova região. Logo $R_{n+1} = R_n + 2n$. Daí

$$\begin{aligned} R_1 =& (R_m - R_{n-1}) + (R_{n-1} - R_{n-2}) + \cdots + \\ &+ (R_3 - R_2) + (R_2 - R_1) + R_1 \\ =& 2(n-1) + 2(n-2) + \cdots + 4 + 2 + R_1 \\ =& \frac{[2(n-1)+2](n-1)}{2} = n^2 - n + r_1 = n^2 - n + 2. \end{aligned}$$

12. Seja $f(t)$ a posição, em metros, no instante $t$ segundos.

Temos $f(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c$. Como $f(0) = 17$, $f(10) = 45$ e $f(20) = 81$, obtemos o sistema $\begin{cases} c = 17 \\ 50a + 10b + c = 45 \\ 200a + 20b + c = 81 \end{cases}$. Substituindo $c = 17$, obtemos $\begin{cases} 50a + 20b = 28 \\ 200a + 20b = 64 \end{cases}$. Subtraindo da segunda equação o quádruplo da primeira, obtemos $-20b = -48$, $b = 2,4$.

Substituindo, resulta $a = 0,08$. Temos $f(t) = 0,04t^2 + 2,4t + 17$.

Daí, $f(5) = 30$, $f(15) = 62$ e $f(25) = 102$.

13. Se $f(t)$ é a posição no instante $t$, temos $f(0) = 0$, $f(1) = 30$, $f(2) = 55$, $f(3) = 75$. Se a força for constante, $f(t) = at^2 + bt + c$

$$\begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 30 \\ 4a + 2b + c = 55 \\ 9a + 3b + c = 75 \end{cases} \qquad \begin{cases} c = 0 \\ a + b = 30 \\ 4a + 2b = 55 \\ 9a + 3b = 75 \end{cases} \qquad \begin{cases} c = 0 \\ 1 + b = 30 \\ 2a = \phantom{-}5 \\ 6a = -15 \end{cases}$$

$a = 2,5 \quad b = 32,5 \quad c = 0$

a) Como o sistema tem solução, os dados são compatíveis com a hipótese da força constante.

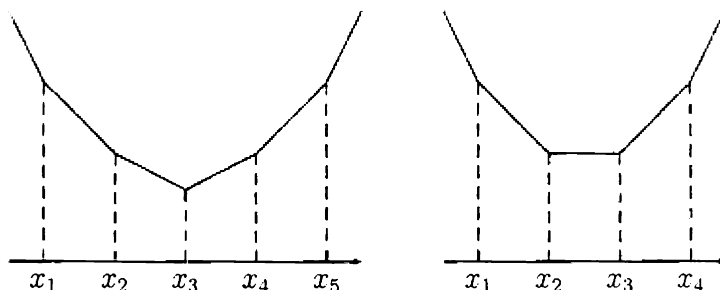
b) $f(t) = -2,5t^2 + 32,5t$. Daí, $f(5) = -2,5 \cdot 25 + 32,5 \cdot 5 = 100$. Está a 100m do ponto onde começou a frenagem.

c) A velocidade é $f(t) = 2at + b = -5t + 32,5$. A velocidade é nula quando $t = 6,5$. O veiculo demora $6,5$ segundos para chegar ao repouso.

d) $f(0) = 32,5$ m/s.

14. a) $(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \cdots + (x - x_n)^2 = nx^2 - 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)x + (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$ é mínimo para $x = -\frac{b}{2a} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$

b) Suponhamos que $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$. A função $f(x) = |x - x_1| + |x - x_2| + \cdots + |x - x_n|$ é uma função poligonal, cujo gráfico é formado por segmentos de reta tais que dois segmentos consecutivos tem um vértice em comum. Para $x \leq x_1$, todos os valores absolutos são iguais a $(x_i - x)$; portanto, a inclinação do gráfico é igual a $-n$, para $x \leq x_1$. Para $x_1 \leq x \leq x_2$, o primeiro valor absoluto é igual a $|x_1 - x|$, sendo os demais iguais a $|x - x|$, para $i = 2, \ldots, n$. Logo, a inclinação é igual a $-n + 2$, neste intervalo. Quando $n$ é ímpar, a inclinação troca de sinal (passando de -1 para 1) no ponto mediano $x_{(n+1)/2}$; logo, a função assume seu valor mínimo neste ponto. Quando $n$ é par, a inclinação é nula no intervalo $[x_{n/2}, x_{(n/2)+1}]$; logo, $f(x)$ é mínimo em cada ponto deste intervalo. Os gráficos abaixo ilustram estas duas situações.




15. a) Se os lados são $x$ e $y$ (medidos em centímetros), temos, pela semelhança dos triângulos brancos, $\frac{60-y}{x} = \frac{y}{80-x}$. Daí, $3x + 4y = 240$ e $y = 60 - \frac{3}{4}x$. A área é $xy = x(60 - \frac{3}{4}x) = -\frac{3}{4}x^2 + 60x$ e é máxima para $x = -\frac{b}{2a} = 40$. Nesse caso, $y = 30$. O retângulo da maior área tem lados iguais a 40cm e 30cm e área igual a 1200 cm$^2$.

b) Na segunda figura, seja $x$ o lado do retângulo apoiado na hipotenusa e $y$ o outro lado. A altura do triângulo retângulo é $h = \frac{bc}{a} = \frac{60\times 80}{100} = 48$cm. Usando semelhança de triângulos, temos $\frac{x}{100} = \frac{48-y}{48}$. Daí, $y = \frac{48(100-x)}{100}$. A área do retângulo é $xy = \frac{48x(100-x)}{100}$, cujo valor máximo ocorre para $x = 50$cm, com área igual a 1200cm$^2$.

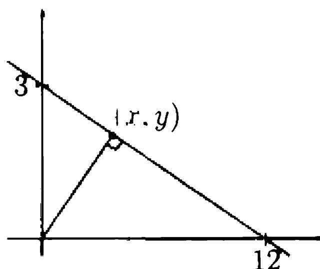
A conclusão é que os dois modos de apoiar o retângulo sobre um dos lados do triângulo conduzem a triângulos com a mesma área máxima (igual à metade da área do triângulo). É possível demonstrar que, caso o retângulo não se apóie sobre um dos lados, sua área será menor que esta metade. Assim, para obter retângulos de área máxima é realmente necessário apoiar um de seus lados sobre o contorno do triângulo.

16. Se os lados são $x$ e $y$, temos $2x + y = 80$, $y = 80 - 2x$. A área é $xy = x(80-2x) = -2x^2 + 80x$ e deve ser máxima. Devemos ter $x = -\frac{b}{2a} = 20$. Daí, $y = 80 - 2\cdot 20 = 40$. A cerca deve ter os lados perpendiculares ao rio medindo 20 metros e o lado paralelo ao rio medindo 40 metros.

17. No instante t, $Q$ está em $(0, t)$ e $P$ está em $(2t - 2, 0)$. A distancia $PQ$ satisfaz $PQ^2 = (2t-2)^2 + t^2 = 5t^2 - 8t + 4$. $PQ$ será mínima quando $(PQ)^2$ o for. Isso ocorre no instante $t = -\frac{b}{2a} = 0,8$. Para $t = 0,8$ temos $PQ^2 = 0,8$ e $PQ = \sqrt{0,8} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

18. $z = x^2+y^2 = x^2+\left(\frac{12-3x}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}x^2 - \frac{9}{2}x+9$ será mínimo para $x = \frac{b}{2a} = 1,44$. Neste caso, $y = 1,92$. O valor mínimo procurado é $1,44^2 + 1,92^2 = 5,76$.

Outro modo:



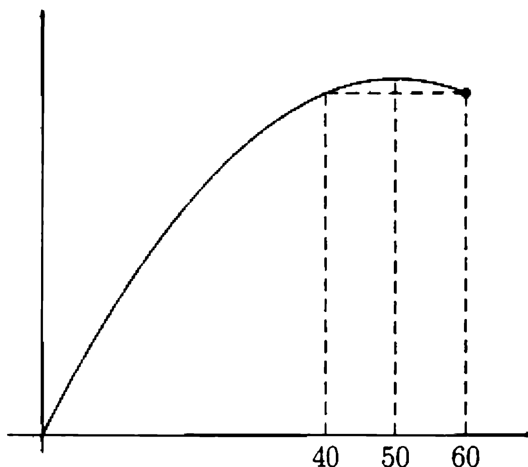

Se $x+4y = 12$, o ponto $(x, y)$ pertence à reta desenhada. $x^2+y^2$ é o quadrado da distancia do ponto $(x, y)$ à origem. $x^2 + y^2$ será mínimo quando o ponto $(x, y)$ for o ponto da reta situado mais próximo da origem, isto é, quando o ponto $(x, y)$ for o pé da perpendicular baixada da origem à reta. Nesse caso, o valor mínimo de $x^2 + y^2$ será o quadrado da altura relativa à hipotenusa do triângulo retângulo formado pela reta com eixos coordenados. Os catetos são 3 e 4, a hipotenusa é 5 e a altura $h$ satisfaz $ah = bc$, $5h = 3x4 = 12$. $h = 2,4$ e a resposta é $h^2 = 5,76$.

19. Se $x$ passageiros ocupam os lugares, a receita da empresa é $800x+10(100-x) = -10x^2 + 1800x$. A receita será máxima para $x = -\frac{b}{2a} = 90$

20. Reduzindo $t$ reais no preço da caixa, ele venderá $300 + 40t$ caixas a $20 - t$ reais cada, arrecadando $R = (300 + 40t)(20 - t) = -40t^2 + 500t + 6000$. A receita será máxima se $t = -\frac{b}{2a} = 6,25$. O preço deve ser $20 - 6,25 = 13,75$ reais para que a receita seja máxima.

21. Se o preço unitário é $p$, quem compra $x$ balas paga, sem desconto, $px$ Com desconto o preço pago é $px(1 - \frac{x}{100}) = px - \frac{p}{100}x^2$.

O gráfico do preço pago em função de $x$ é um arco de parábola.

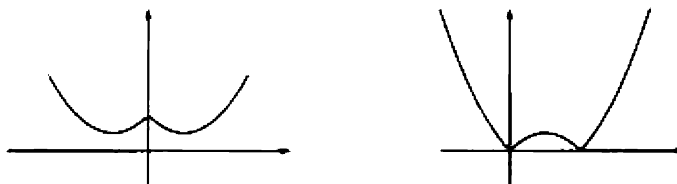



Todos os que compraram entre 40 (inclusive) e 50 balas poderiam obter mais balas pelo mesmo preço. A resposta é Daniel.

22. Reduzindo $t$ reais, são vendidos $300 + 100t$ ingressos a $9 - t$ reais cada e a receita é de $(300 + 100t)(9 - t) = 100(-t^2 + 6t + 27)$ reais. A receita será máxima para $t = -\frac{b}{2a} = 3$. O preço deve ser 4 reais.

23. O vértice da parábola $y = 21x - x^2$, que é o ponto mais alto do gráfico, é um ponto de abscissa $x = -\frac{b}{2a} = 10,5$. Quanto mais perto do vértice estiver o ponto, mais alto estará. Como $n$ deve ser inteiro, os pontos de abscissa inteira que estão mais próximos do vértice são $n = 10$ e $n = 11$. Em ambos, o valor de $21n - n^2$ é 110.

24. .



25. a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ equivale a $x = 2$ ou $x = 3$. O conjunto é formado pelos pontos de duas retas verticais.

b) Parábola.

26. Fazendo $x^2 = y$, obtemos $y^2+y-20 > 0$. Daí, $y < -5$ ou $y > 4$, isto é, $x^2 < -5$ ou $x^2 > 4$. A primeira alternativa é absurda. Logo, $x^2 > 4$, $x^2 - 4 > 0$. A resposta é $x < -2$ ou $x > 2$.

27. $\begin{cases} c = f(0) \\ a+b+c = f(1) \\ 4a+2b+c = f(2) \end{cases}$ ; $\begin{cases} c = f(0) \\ a+b = f(1) - f(0) \\ 4a+2b = f(2) - f(0) \end{cases}$ ;

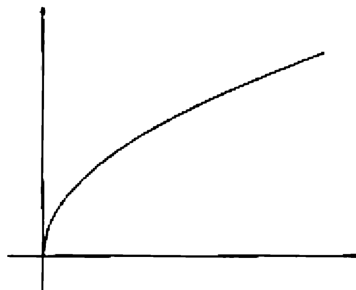
$$\begin{cases} c = f(0) \\ a+b = f(1) - f(0) \\ 2a = f(2) - 2f(1) + f(0) \end{cases}$$

Daí, $a = \frac{f(2)-2f(1)+f(0)}{2}$, $b = \frac{f-3(0)+4f(1)-f(2)}{2}$, $c = f(0)$.

28. Se o quilo custa $12 + t$ reais, serão vendidos $10 - 5t$ quilos e a receita será $(12 + t)(100 - 5t) = -5t^2 + 40t + 1200$ reais. A receita será máxima para $t = -\frac{b}{2a} = 4$. O preço deve ser 16 reais.

29. Se os lados são $3t$ e $4t$, o imposto é $7 \cdot 3t \cdot 4t + 2500 - 60 \cdot 14t = 84t^2 - 840t + 2500$ e será mínimo para $t = -\frac{b}{2a} = 5$. Os lados devem medir 15 e 12 metros. O imposto de $84 \cdot 5^2 - 840 \cdot 5 + 2500 = 400$ reais.

30. Uma forma de resolver o problema é designar por $x$ um dos lados do retângulo, cujo perímetro é expresso, então, pela função $f(x) = 2\left(x + \frac{a}{x}\right)$. Normalmente, o valor mínimo de $f$ é obtido através do uso de Cálculo, assunto normalmente não conhecido pelos alunos do Ensino Médio. Alternativamente, designemos por $2p$ o perímetro. Os valores possíveis de $2p$ são aqueles para os quais o sistema $\begin{cases} x + y = p \\ xy = a \end{cases}$ tem solução ou, equivalentemente, a equação $x(p - x) = a$ (ou seja, $x^2 - px + a = 0$) tem solução. Deve-se ter, portanto, $p^2 - 4a \geq 0$, isto é, $p \geq 2\sqrt{a}$. Logo, o valor mínimo do perímetro é $4\sqrt{a}$. tem $y = \sqrt{x}$ se e somente se $y^2 = x$ e $y \geq 0$. Logo, o gráfico de $y = \sqrt{x}$ é formado pelos pontos da parábola $y^2 = x$ situados acima do eixo dos $x$ ou sobre ele.



31. Chamando $\sqrt{x}$ de $y$, obtemos a equação de segundo grau $y + m = y^2$, ou seja, $y^2 - y - m = 0$.

Essa equação em $y$ terá duas raízes reais diferentes quando seu discriminante $\Delta = 1 + 4m$ for positivo, ou seja, quando $m > -\frac{1}{4}$. Cada raiz em $y$ que seja maior que ou igual a zero dará uma raiz para a equação em $x$ e cada raiz negativa da equação em $y$ é igual a $-m$ e a soma das raízes da equação em $y$ é igual a 1. Portanto:

i) $m > 0$. A equação em $y$ tem duas raízes de sinais contrários.
ii) $m = 0$. A equação em $y$ tem uma raiz nula e uma raiz positiva.
iii) $-\frac{1}{4} < m < 0$. A equação em $y$ tem duas raízes positivas distintas.
iv) $m = -\frac{1}{4}$. A equação em $y$ tem duas raízes positivas iguais.
v) $m < -\frac{1}{4}$. A equação em $y$ não tem raiz real.

Logo:

a) $m > 0$. A equação em $x$ tem uma única raiz.
b) $-\frac{1}{4} < m < 0$. A equação em $x$ tem duas raízes.
c) $m = -\frac{1}{4}$. A equação em $x$ tem uma única raiz.
d) $m < -\frac{1}{4}$. A equação em $x$ não tem raiz real.

32. Se $d$ é o diâmetro, o perímetro é $\pi d$ e a área é $\frac{\pi d^2}{a}$. O preço de $A$ é $\alpha = 5\pi d^2 + 15\pi d + 200$ e o preço de $B$ é $\beta = 4,5\pi d^2 + 20\pi d + 600$, sendo $d > 0$. $A$ é mais vantajosa quando $\beta - \alpha = -0,5\pi d^2 + 5\pi d + 400 > 0$. Este trinômio tem duas raízes de sinais contrários; $d$ deve estar compreendido entre elas e ser positivo. Logo, devemos ter $0 < d < 5 + \sqrt{25 + \frac{800}{\pi}} \cong 21,72$ metros.

Na outra situação, $\alpha = 4,5\pi d^2 + 20\pi d + 400$ e $\beta = 5\pi d^2 + 10\pi d + 150$. $A$ é mais vantajosa quando $\beta - \alpha = 0,5\pi d^2 - 10\pi d - 250 > 0$. Este trinômio tem duas raízes de sinais contrários; $d$ deve ser exterior ao intervalo das raízes e ser positivo, isto é, $d > 10 + \sqrt{100 + \frac{500}{\pi}} \cong 26,10$ metros.

33. $S = ax + by = ax + \frac{bc}{x}$. Os valores de $S$ são positivos quando $x > 0$ e negativos quando $x < 0$. temos $ax^2 - Sx + bc = 0$. O discriminante deve ser maior que ou igual a 0. Portanto, $S^2 - 4abc \geq 0$. Daí, $S \geq 2\sqrt{abc}$ ou $S \leq -2\sqrt{abc}$. Para $x > 0$, o menor valor de $S$ é $2\sqrt{abc}$.

34. Sejam 1, $c$, $h$ as dimensões, em metros, do buraco. Devemos ter $1 \cdot c \cdot h = 300$. O custo é $y = 10c = 30h = 10c + \frac{9000}{c}$. Como $c > 0$, temos $y > 0$. Temos $10c^2 - yc + 9 = 9000 = 0$. O discriminante deve ser maior que ou igual a 0. Portanto, $y^2 - 260000 \geq 0$ e, como $y > 0$, $y \geq 600$. O custo mínimo é 600 reais. Se $y = 600$, $10c^2 - 600c + 9000 = 0$ e $c = 30$ metros. Se $c = 30$, $h = 10$ metros.

35. Um empresário entrou com o capital $x$ e trabalhou 2 dias por semana; o outro investiu $100 - x$ e trabalho dois dias em cada semana. Seus lucros foram respectivamente $99 - x$ e $99 - (100 - x) = x \quad 1$. O lucro de cada um por dia de serviço é $(99 - x)/2$ e $(x - 1)/3$. Cada real aplicado rendeu, por dia de serviço, o lucro

$$\frac{99 - x}{2x} = \frac{x - 1}{3(100 - x)},$$

a igualdade traduzindo a equitatividade da sociedade. Simplificando, chegamos à equação $x^2 - 595x + 29.700 = 0$, cujas raízes são 55 e 540. Como $540 > 100$, o valor de $x$ que responde a questão é $x = 55$. Portanto um sócio entrou com 55 mil reais e outro com 45 mil.

**Observações:** 1. Se chamarmos de $x$ o capital investido pelo sócio que trabalhou 3 dias por semana, teremos

$$\frac{99 - x}{3x} = \frac{x - 1}{2(100 - x)},$$

o que levará à equação $x^2 + 395x - 19.800 = 0$, cujas raízes são 45 e -440. Como o problema não comporta resposta negativa, devemos ter $x = 45$ e o outro sócio entrou com $100 - x = 55$ mil reais

2. A primeira solução é, do ponto de vista didático, preferível porque mostra que às vezes a raiz que não serve pode também ser positiva.

3. Ao resolver este problema deve-se ter o cuidado de observar que 99 mil reais não é o lucro de cada empresário e sim a soma do capital que ele investiu mais o lucro.

36. Se a velocidade da corrente é $v$, os tempos gastos são $\frac{12}{12+v}$ horas e $\frac{8}{12-v}$ horas. $\frac{12}{12+v} + \frac{8}{12-v} = 2$; $\frac{240-4v}{144-v^2} = 2$; $120 - 2v = 144 - v^2$; $v^2 - 2v - 24 = 0$. A única raiz positiva é 6. A velocidade da corrente é 6km/h e os tempos são 12/18 h $= 2/3$ h $= 40$ min (a favor da corrente) e 1h20min (contra a corrente).

37. Com $x$ alunos, a parte de cada um seria $405/x$ reais. Com $x-2$ alunos, cada um dia daria $405/(x-2)$ raiz. Então $\frac{405}{x-2} = \frac{405}{x} + 1,2$. Eliminando denominadores e simplificando: $x^2 - 2x \quad 675 = 0$. A única raiz positiva desta equação é 27. Logo a turma tinha 27 alunos.

38. a) S$\not f$ é quadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, e $\varphi(x) = f(x+h) - f(x) = a(x+h)^2 + b(x+h) + c - (ax^2 + bx + c) = 2ahx + ah^2 + bh$ é afim e não-constante, qualquer que seja $h \neq 0$.

b) Suponhamos, para $h \neq 0$ fixando, $\varphi(x) = f(x+h) - f(x) = px + q$, com $p \neq 0$.

Seja $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ uma progressão aritmética não-constante, de razão $r$.

Afirmamos que $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ é uma progressão aritmética de segunda ordem não-degenerada. Com efeito, $f(x_{n+1}) - f(x_n) = f(x_n + r) - f(x_n) = px_n + q = y_n$ é uma progressão aritmética não-constante, pois $y_{n+1} - y_n = px_{n+1} + q - (px_n + q) = p(x_{n+1} - x_n) = pr$ é constante e diferente de zero. Logo, pelo Teorema de Caracterização, $f$ é quadrática.

c) Os pontos do gráfico são da forma $P = (x, x^2)$. Pela definição de parábola, a distancia $\overline{PF}$ deve ser igual a $x^2 + t$, que é a distancia de $P$ à reta $y = -t$. Tomando os quadrados temos $\overline{PF}^2 = (x^2 + (x^2 - t))^2 = (x^2 + t)^2$. Efetuando e simplificando obtemos imediatamente $t = 1/4$.

# Funções Quadráticas

# CAPÍTULO 7

## Funções Polinomiais

### 7.1 Exercícios

1. Sejam $P(x)$ e $p(x)$ polinômios não identicamente nulos, com $\operatorname{gr} P(x) \geq \operatorname{gr} p(x)$. (Onde gr significa o grau do polinômio.) Prove que existe um polinômio $q(x)$ tal que $\operatorname{gr}[P(x)-p(x)q(x)] < \operatorname{gr} P(x)$. Usando repetidamente este fato, mostre que existem polinômios $q(x)$ e $r(x)$ tais que $P(x) = p(x)q(x) + r(x)$, com $\operatorname{gr} r(x) < \operatorname{gr} p(x)$, chamam-se respectivamente o *quociente* e o *resto* da divisão de $P(x)$ por $p(x)$.

2. Prove a unicidade do quociente e do resto, isto é, se $P(x) = p(x)q_1(x) + r_1(x)$ e $P(x) = p(x)q_2(x) + r_2(x)$, com $\operatorname{gr} r_1(x)$ e $\operatorname{gr} r_2(x)$ ambos menores do que $\operatorname{gr} p(x)$, então $q_1(x) = q_2(x)$ e $r_1(x) = r_2(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

3. Diz-se que o número real $\alpha$ é uma raiz de *multiplicidade* $m$ do polinômio $p(x)$ quando se tem $p(x) = (x-\alpha)^m q(x)$, com $q(\alpha) \neq 0$. (Se $m = 1$ ou $m = 2$, $\alpha$ chama-se respectivamente uma *raiz simples* ou uma *raiz dupla*.) Prove que $\alpha$ é uma raiz dupla de $p(x)$ se, e somente se, $p(\alpha) = p'(\alpha) = 0$ e $p''(\alpha) \neq 0$. Generalize.

4. Certo ou errado: $\alpha$ é a raiz dupla de $p(x)$ se, e somente se, é a raiz simples de

$p'(x)$.

5. Determine o polinômio $p(x)$ de menor grau possível tal que $p(1) = 2$, $p(2) = 1$, $p(3) = 4$ e $p(4) = 3$.

6. Seja $p(x)$ um polinômio cujo grau $n$ é um número ímpar. Mostre que existem números reais $x_1$, $x_2$ tais que $p(x_1) < 0$ e $p(x_2) > 0$. Conclua daí que todo polinômio de grau ímpar admite pelo menos uma raiz real.

7. Mostre que se $n$ é um número par então o polinômio $p(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1$ não possui raiz real.

8. Tomando $x_0 = 3$, use a relação de recorrência $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right)$ para calcular $\sqrt{5}$ com três algarismos decimais exatos. (Por exemplo: sabemos que 1,414 é uma aproximação de $\sqrt{2}$ com três algarismos decimais exatos porque $1,414^2 < 2 < 1,415^2$.)

9. Usando o método de Newton, estabeleça um processo iterativo para calcular $\sqrt[3]{a}$ e aplique-o a fim de obter um valor aproximado de $\sqrt[3]{2}$.

## 7.2 Soluções

1. Se $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, com $a_n \neq 0$ e $p(x) = b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \cdots + b_1 x + b_0$, com $b_p \neq 0$, tome $q_0 = \frac{a_n}{b_n} x^{n-p}$. $P(x) - p(x)q_0(x) = (a_{n-1} - \frac{a_n}{b_n} b_{p-1})x^{n-1} + \cdots$ tem grau no máximo igual a $n - 1$.

   Pondo $P(x) - p(x)q_0(x)$ para desempenhar o papel de $P(x)$, vemos que existe um polinômio $q_1(x)$ tal que $P(x) - p(x)q_0(x) - p(x)q_1(x) = P(x) - p(x)[q_0(x) + q_1(x)]$ tem, no máximo, grau $n-2$. Prosseguindo, vemos que existe um polinômio $q(x) = [q_0(x) + q_1(x)] + \cdots + q_{n-p}(x)$ tal que $P(x) - p(x)q(x)$ tem grau, no máximo, igual a $p - 1$. Chamando $P(x) - p(x)q(x)$ em $r(x)$, está provado o que se queria demonstrar.

2. Se $P(x) = p(x)q_1(x) + r_1(x)$ e $P(x) = p(x)q_2(x) + r_2(x)$ com os graus de $r_1(x)$ e de $r_2(x)$ ambos menores que o grau de $p(x)$, temos, subtraindo, $p(x)[q_1(x) - q_2(x)] = r_2(x) - r_1(x)$. Se $q_1(x) - q_2(x)$ não for identicamente nulo, o grau do primeiro membro será igual a ou maior que o grau de $p(x)$, ao passo que o grau do segundo membro será menor que o grau de $p(x)$. Logo $q_1(x) - q_2(x)$

é identicamente nulo, ou seja, $q_1(x) = q_2(x)$. Substituindo, obtemos $0 = r_2(x) - r_1(x)$, ou seja, $r_1(x) = r_2(x)$.

3. a) Se $\alpha$ é raiz simples de $p(x)$ então $p(x) = (x-\alpha)q(x)$, com $q(\alpha) \neq 0$. Daí, $p(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) = 0$ e, como $p'(x) = (x - \alpha)'q(x) + (x-\alpha)q'(x) = q(x) + (x-\alpha)q'(x)$, $p'(\alpha) = q(\alpha) \neq 0$.

   b) Se $p(\alpha) = 0$ e $p'(\alpha) \neq 0$, então $p(x) = (x-\alpha)q(x)$ pois $\alpha$ é raiz de $p(x)$ e, como $p'(x) = (x-\alpha)'q(x) + (x-\alpha)q'(x) = q(x) + (x-\alpha)q'(x)$, $q(a) = p'(a) \neq 0$.

   c) Se $\alpha$ é a raiz dupla de $p(x)$ então $p(x) = (x-\alpha)^2 q(x)$, com $q(\alpha) \neq 0$. Daí, $p(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) = 0$ e, como $p'(x) = [(x-\alpha)^2]'q(x) + (x-\alpha)^2 q'(x) = 2(x-\alpha)q(x) + (x-\alpha)^2 q'(x)$ e $p''(x) = 2q(x) + 4(x - \alpha)q'(x) + (x-\alpha)^2 q''(x)$, $p'(\alpha) = 0$ e $p''(\alpha) = 2q(\alpha) \neq 0$.

   d) Se $p(\alpha) = p'(\alpha) = 0$ e $p''(\alpha) \neq 0$, então $p(x) = (x-\alpha)q(x)$ pois $\alpha$ é raiz de $p(x)$ e como $p'(x) = (x-\alpha)'q(x) + (x-\alpha)q'(x) = q(x) + (x-\alpha)q'(x)$, $q(\alpha) = p'(\alpha) = 0$; logo $\alpha$ é raiz de $q(x)$ e portanto, $q(x)$ é divisível por $(x-\alpha)$, o que garante a existência de um polinômio $q_1(x)$ tal que $q(x) = (x-\alpha)q_1(x)$. Então $p(x) = (x-\alpha)q(x) = (x-\alpha)\cdot(x-\alpha)q_1(x) = (x-\alpha)^2 q_1(x)$; como $p'(x) = [(x-\alpha)^2]'q_1(x) + (x-\alpha)^2 q_1'(x) = 2(x-\alpha)q_1(x) + (x-\alpha)q_1'(x)$ e $p''(x) = 2q_1(x) + 4(x-\alpha)q_1'(x) + (x-\alpha)^2 q_1''(x)$, $p''(\alpha) = 2q(\alpha)$, $q(\alpha) = \frac{1}{2}p''(\alpha) \neq 0$.

4. Errado. Se $p(x) = x^2 - 1$, temos $p'(x) = 2x$. 0 é raiz simples de $p'(x)$ mas não é raiz dupla de $p(x)$.

5. (1,2); (2,1); (3,4); (4,3)

$$
\begin{aligned}
p(x) = & 2\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} + 1\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} \\
& + 4\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} + 3\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} \\
= & -\frac{4}{3}x^3 + 10x^2 - \frac{65}{3}x + 15.
\end{aligned}
$$

6. Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ e suponhamos $a_n > 0$. Seja $k$ o maior dos números $|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|$.

   Se $x > 1$, $|a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0| \leq |a_{n-1}|x^{n-1} + \cdots + |a_1|x + |a_0| \leq |a_{n-1}|x^{n-1} + \cdots + |a_1|x + |a_0| \leq |k|x^{n-1} + \cdots + kx^{n-1} + kx^{n-1} = nkx^{n-1}$.

Se tomamos um valor para $x$ que, além de ser maior que 1, seja também maior que $\frac{nk}{a_n}$, teremos $x > \frac{nk}{a_n}$, $a_n x > nk$, $a_n x^n > nkx^{n-1} > |a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0|$, $p(x) > 0$.

Se $x < -1$, $|a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0| \leq |a_{n-1}| \cdot |x|^{n-1} + \cdots + |a_1| \cdot |x| + |a_0| \leq k|x|^{n-1} + \cdots + k|x|^{n-1} = nk|x|^{n-1}$. Se tomarmos um valor para $x$ que, além de ser menor que -1, seja também menor que $-\frac{nk}{a}$, teremos $x < -\frac{nk}{a_n}$, $a_n x < -nk$, $a_n x^n < -nkx^{n-1}$ (como $n$ é ímpar, $x^{n-1}$ é positivo), $|a_n x^n| > nk|x|^{n-1}$ (na desigualdade anterior os dois membros são negativos; de dois números negativos, o menor é o que tem maior módulo), $|a_n x^n| > |a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0|$ e, como $a_n x^n$ é negativo, $p(x) < 0$.

Caso fosse $a_n < 0$, bastava aplicar a conclusão ao polinômio $-p(x)$.

Pela continuidade do polinômio, se $p(x_1) < 0$ e $p(x_2) > 0$, existe $x_0$ compreendido entre $x_1$ e $x_2$ tal que $p(x_0) = 0$.

7. 1 não é raiz do polinômio pois $p(1) = n + 1 \neq 0$. Se $x \neq 1$, $p(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$. Como $n$ é par, não existe $x$ real, $x \neq 1$, tal que $x^{n+1} = 1$. Logo, $p(x) \neq 0$ também para todo $x$ real diferente de 1.

8. Obtém-se $x_0 = 3$; $x_1 = 2,333$; $x_2 = 2,238$; $x_3 = 2,236$; $x_4 = 2,236$. Como $2,236^2 < 5$ e $2,237^2 > 5$, a resposta é 2,236.

9. Devemos determinar a raiz real de $p(x) = x^2 - a$. A fórmula do método de Newton é

$$x_{n+1} = x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - a}{3x_n^2} = \frac{2}{3}x_n + \frac{a}{3x_n^2}.$$

No caso $a = 2$, fórmula fica $x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{a}{3x_n^2}$. Começando com $x_0 = 1$, obtém-se $x_1 = 1,3333$; $x_2 = 1,2639$; $x_3 = 1,2599$; $x_4 = 1,2599$. Como $1,2599^3 < 2$ e $1,2600^3 > 2$, a aproximação de $\sqrt[3]{2}$ com 4 decimais exatas é 1,2599.

# CAPÍTULO 8

## Funções Exponenciais e Logarítmicas

### 8.1 Exercícios

1. Com um lápis cuja ponta tem 0,02cm de espessura, deseja-se traçar o gráfico da função $f(x) = 2^x$. Até que distancia à esquerda do eixo vertical pode-se ir sem que o gráfico atinja o eixo horizontal? (Tome 1cm como unidade de comprimento.)

2. Seja $f(b,t)$ uma função positiva, definida para $b \geq 0$ e $t \in \mathbb{R}$, linear em $b$ crescente (ou decrescente) em t, tal que $f(b, t+s) = f(f(b,s),t)$ para quaisquer $b, s, t$. Prove que $f$ é de tipo exponencial.

3. Dados $a > 0$ e $b > 0$, qual a propriedade da função exponencial que assegura a existência de $h \neq 0$ tal que $b^x = a^{x/h}$ para todo $x \in \mathbb{R}$? Mostre como obter o gráfico de $y = b^x$ a partir do gráfico de $y = a^x$. Use sua conclusão para traçar o gráfico de $y = (1/\sqrt[3]{4})^x$ a partir do gráfico de $y = 2^x$.

4. Prove que uma função do tipo exponencial fica determinada quando se conhecem dois de seus valores. Mais precisamente, se $f(x) = b \cdot a^x$ e $F(x) = B \cdot A^x$ são tais que $f(x_1) = F(x_1)$ e $f(x_2) = F(x_2)$ com $x_1 \neq x_2$ então $a = A$ e $b = B$.

5. Dados $x_0 = 0$ e $y_0 > 0$ quaisquer, prove que existe $a > 0$ tal que $a^{x_0} = y_0$.

6. Dados $x_0 \neq x_1$ e $y_0$, $y_1$ não-nulos com o mesmo sinal, prove que existem $a > 0$ e $b$ tais que $b \cdot a^{x_0} = y_0$ e $b \cdot a^{x_1} = y_1$.

7. A grandeza $y$ se exprime como $y = b \cdot a^t$ em função do tempo $t$. Sejam $d$ o acréscimo que se deve dar a $t$ para que $y$ dobre e $m$ (meia-vida de $y$) o acréscimo de $t$ necessário para que $y$ se reduza à metade. Mostre que $m = -d$ e $y = b \cdot 2^{t/d}$, logo $d = \log_a 2 = 1/\log_2 a$.

8. Observações por longo tempo mostram que, após períodos de mesma duração, a população da terra fica multiplicada pelo mesmo fator. Sabendo que essa população era de 2,68 bilhões em 1956 e 3,78 bilhões em 1972, pede-se: (a) O tempo necessário para que a população da terra dobre de valor; (b) A população estimada para o ano 2012; (c) Em que ano a população da terra era de 1 bilhão.

9. Dê um argumento independente de observações para justificar que, em condições normais, a população da terra após o decurso de período iguais fica multiplicada pela mesma constante.

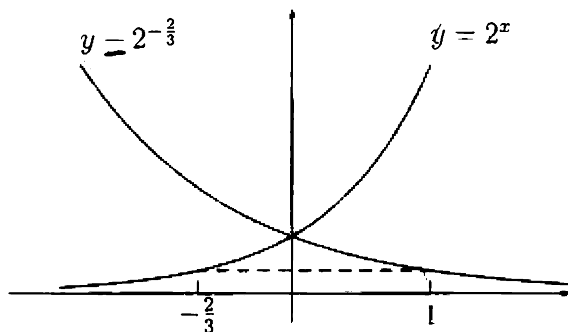
10. Resolva os exercícios do livro "Logaritmos", especialmente os do último capítulo.

## 8.2 Soluções

1. Podemos admitir que a ponta do lápis é um disco com raio de 0,01cm. O gráfico tocara o eixo horizontal num ponto $(x, 2^x)$ sempre que $2^x < 0,001$cm, ou seja quando $x \cdot \log 2 < \log 0,01$, donde $x < \log 0,01/\log 2 = -\log 100/\log 2$. tomando logaritmos de base 10, temos $\log 100 = 2$ e $\log 2 = 0,301$. Então o gráfico tocará o eixo horizontal nos pontos de abscissa $x < -6,644$cm.

2. Ponhamos $\varphi(t) = f(1,t)$. Então $\varphi$ é estritamente monótona e $\varphi(s+t) = f(1, s+t) = f(f(1,s),t) = f(f(1,s)\cdot 1, t) = f(1,s)\cdot f(1,t) = \varphi(s)\cdot\varphi(t)$. Pelo Teorema de Caracterização da Função Exponencial (M.E.M. vol. 1, pág. 183) segue-se que, pondo $a = \varphi(1) = f(1,1)$, tem-se $f(1,t) = \varphi(t) = a^t$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Daí $f(b,t) = f(b\cdot 1, t) = b \cdot f(1,t) = b \cdot a^t$.

3. A propriedade em questão diz que a função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = b^x$, é sobrejetiva. Portanto, dado $a > 0$, existe $h \in \mathbb{R}$ tal que $b^h = a$, ou seja, $b = a^{1/h}$. Daí $b^x = a^{x/h}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.




Para obter o gráfico de $y = b^x$, trace a reta horizontal que passa pelo ponto de abscissa $x/h$ no gráfico de $y = a^x$. O ponto dessa reta que tem abscissa $x$ é $(x, b^x)$. Quando $a = 2$ e $b = 1/\sqrt[3]{4}$, a desigualdade $a^{x/h} = b^x$, que equivale a $h = \log a / \log b$, nos dá $h = -3/2$ e $x/h = -2x/3$.

4. Se $ba^{x_1} = BA^{x_1}$ e $ba^{x_2} = BA^{x_2}$ então $(a/A)^{x_1} = B/b = (a/A)^{x_2}$. Como $x_1 \neq x_2$, isto obriga $a/A = 1$, ou seja, $a = A$. Então $bA^{x_1} = BA^{x_1}$, logo $b = B$.

5. Basta tomar $a = y_0^{1/x_0}$.

6. Basta tomar $a = (y_0/y_1)^{\frac{1}{x_0 - x_1}}$ e $b = y_0 \cdot a^{-x_0}$.

7. Deve-se ter $b \cdot a^d = 2b$, portanto $a^d = 2$, donde $d = \log_a 2 = 1/\log_2 a$.

   **Observação:** geralmente $m$ (e, equivalentemente, $d$) é conhecido experimentalmente, enquanto $a$ se obtém a partir de $m$: de $a^d = 2$, ou seja, $a^{-m} = 2$, resulta que $a = 2^m$. Assim a expressão de $y$ em função de $t$ fica $y = b \cdot 2^{mt}$, onde $b$ é o valor inicial de $y$ (correspondente a $t = 0$).

8. a) As observações indicam que s$b$ é a população num determinado ano e $t$ é o número de anos decorridos a partir daí então a população após esses $t$ anos é dada por uma expressão do tipo $y = b \cdot e^{at}$. Começando a contar os anos a partir de 1956, temos 2,68 bilhões. Para determinar o coeficiente $a$, usaremos a observação de 1972, segundo a qual se tem $2,68e^{16a} = 3,78$ (lembrando que $t = 1972 - 1956 = 16$. Portanto $e^{16a} = 3,78 \div 2,68 = 1,41$. Daí $a = (\log 1,41) \div 16 = 0,0215$. O tempo necessário para que a população dobre é o número $t$ de anos tal que $e^{0,0215t} = 2$. Daí vem $t = (\log 2) \div 0,0215 = 32,24$ anos, aproximadamente 32 anos e 3 meses.

b) Em 2012 teremos $t = 2012 - 1956 = 56$, portanto $2,68e^{0,0215 \cdot 56} = 8,9$ bilhões será a população da terra.

c) A população da terra era de 1 bilhão quando $2,68 \cdot e^{0,0215t} = 1$, donde $e^{0,0215t} = 1 \div 2,68 = 0,373$. Isto nos dá $0,0215t = \log 0,373$ portanto $t = -45,87 = -(45$ anos e 10 meses$)$. Isto ocorreu em 1910.

**Observação:** Usamos logaritmos naturais.

9. Por "independente observações" deve-se entender sem coleta de dados estatísticos, ou seja, um argumento baseado na reflexão. "Em condições normais" significa que não ocorreram repetidas catástrofes nem houve a descoberta do elixir da imortalidade. Então, se começamos a contar os anos a partir de quando a população da terra era de $b$ bilhões de pessoas, indicaremos com $f(b, t)$ a população após o decurso de $t$ anos. A primeira constatação que fizemos é que $f(b, t)$ depende linearmente de $b$. Com efeito, é claro que $f(b, t)$ é função crescente de $b$. Em seguida, notamos que $f(n \cdot b, t) = n \cdot f(b, t)$ como se vê ao imaginarmos $n$ planetas exatamente iguais à terra, cada um deles com $b$ bilhões de pessoas no mesmo ano $t = 0$. O Teorema Fundamental da Proporcionalidade nos garante então que $f(b, t)$ depende linearmente de $t$. Finalmente, temos $f(f(b, s), t) = f(b, s + t)$ pois esta igualdade significa que, se começamos a contar os anos a partir do ano $s$, quando a população seria de $f(b, s)$ bilhões, após decorridos $t$ anos a população será de $f(f(b, s), t)$ bilhões, a mesma que obteríamos se tivéssemos considerado a população de $b$ bilhões, quando $s = t = 0$, e olhássemos para essa população após $s + t$ anos, quando seu valor seria $f(b, s + t)$. Portanto $f(f(b, s), t) = f(b, s + t)$. Pelo Exercício 2, vemos que $f(b, t)$ é do tipo exponencial.

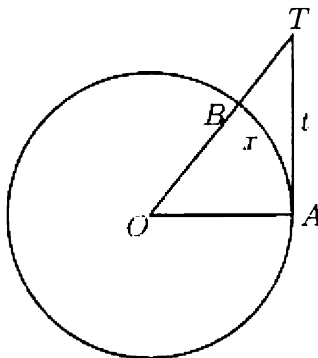
# CAPÍTULO 9

## Funções Trigonométricas

### 9.1 Exercícios

1. Determine os valores máximo e mínimo da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{3}{2 + \operatorname{sen} x}$.

2. Observando a figura a seguir, onde $\widehat{AB} = x$, mostre que $t = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$



3. Se $\operatorname{sen} x + \cos x = 1,2$, qual é o valor do produto $\operatorname{sen} x \cdot \cos x$?

4. Definimos aqui as funções

secante: $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ se $\cos x \neq 0$

cossecante: $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ se $\operatorname{sen} x \neq 0$

cotangente: $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ se $\operatorname{sen} x \neq 0$

Mostre que:

a) $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

b) $\csc^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x$

5. Prove as identidades abaixo:

a) $\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 1 + 2\operatorname{sen}^2 x$

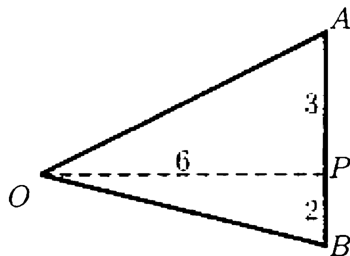
b) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\csc x - \operatorname{cotg} x} = 1 + \cos x$

6. Determine todas as soluções da equação $\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

7. Se $\operatorname{tg} x + \sec x = \frac{3}{2}$, calcule $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.

8. Encontre as fórmulas para $\operatorname{sen} 2x$, $\cos 2x$ 2 $\operatorname{tg} 2x$.

9. Observando a figura abaixo, mostre que $A\hat{O}B = 45°$.



10. Se $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$, calcule $\operatorname{tg} 3x$.

11. Calcular

   a) $y = \operatorname{sen} \frac{5\pi}{12} \cdot \cos \frac{5\pi}{12}$

   b) $y = \dfrac{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}}$

12. Determine os valores máximo e mínimo de $y = 2\operatorname{sen}^2 x + 5\cos^2 x$.

13. Determine os valores máximo e mínimo de $y = \operatorname{sen} x + 2\cos x$.

## 9.2 Soluções

1. Quando $\operatorname{sen} x$ cresce, $f(x)$ decresce e quando $\operatorname{sen} x$ decresce, $f(x)$ cresce. Assim, quando $\operatorname{sen} x = 1$, $f(x) = 1$, que é o seu valor mínimo e, quando $\operatorname{sen} x = -1$. $f(x) = 3$, que é seu valor máximo.

2. Traçando $BC$ perpendicular ao radio $OA$ e sendo $T$ o ponto de intersecção de $OB$ com o eixo tangente à circunferência, vemos que os triângulos $OCB$ e $OAT$ são semelhantes. Logo

$$\frac{DB}{At} = \frac{OC}{OA} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{t} = \frac{\cos x}{1} \Rightarrow t = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

3. $\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = (1,2)^2$

   $1 + 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x = 1,44$

   $\operatorname{sen} x \cos x = 0,22.$

4. a) $1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$

   b) igual.

5. a) Basta substituir tg por $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ e tudo se resolve.

   b) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\csc x - \operatorname{cotg} x} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1 - \cos x} =$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 x}{(1 - \cos x)} \cdot \frac{(1 + \cos x)}{(1 + \cos x)} = \frac{\operatorname{sen}^2 x(1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} = 1 + \cos x$$

6. I) $2x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi$

   II) $2x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{3}$.

7. $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2(1 + \operatorname{sen} x) = 3\cos x$.

   Elevando ao quadrado,

   $4(1 + 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x) = 9(1 - \operatorname{sen}^2 x)$

   $13\operatorname{sen}^2 x + 8\operatorname{sen} x - 5 = 0$

   o que dá $x = -1$ ou $\operatorname{sen} x = \frac{5}{13}$.

   Bem, $\operatorname{sen} x = -1$ não serve pois, neste caso, $\cos x = 0$. também deve ser como se nota observando a primeira linha da solução. Logo, temos $\operatorname{sen} x = \frac{5}{13}$ e $\cos x = \frac{12}{13}$.

8. I) $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cos\cos x$

   II) $\cos 2n = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

   III) $\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$.

9. Fazendo $AOP = \alpha$ e $BOP = \beta$, temos $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ e $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$. Logo, $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{5/6}{5/6} = 1$. Assim, $AOB = \alpha + \beta = 45°$.

10. $\operatorname{tg}^2 x = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3/4} = \frac{4}{3}$.

    $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}(2x + x) = \frac{\frac{4}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{4}{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$.

11. a) $2y = 2\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12} \cdot \cos\frac{5\pi}{12} = \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Logo, $y = \frac{1}{4}$.

    b) $y = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

12. $y = \operatorname{sen}^2 x + 2\cos^2 x + 3\cos^2 x = 2 + 3\cos^2 x$.

    Como $0 \leq \cos^2 x \leq 1$ então o valor mínimo de $y$ é 2 e o valor máximo é 5.

13. $y = \sqrt{5}(\operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\cos x)$.

    Seja $\alpha$ o arco (entre 0 e $\frac{\pi}{2}$) tal que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Note que $\alpha$ existe pois $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$. Portanto, $y = \sqrt{5} \cdot \operatorname{sen}(x + \alpha)$.

    Logo, os valores mínimo e máximo de $y$ são respectivamente $-\sqrt{5}$ e $\sqrt{5}$.

# Parte II

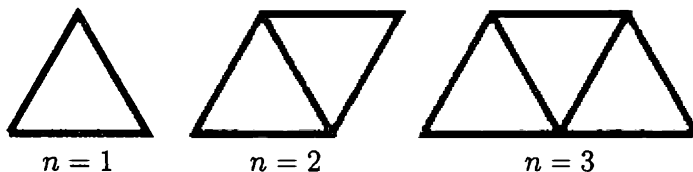
# CAPÍTULO 1

## Progressões

## 1.1 Exercícios

### Seção 1.1

1. Formam-se $n$ triângulos com palitos, conforme a figura.




Qual o número de palitos usados para construir $n$ triângulos?

2. Os ângulos inteiros de um pentágono conexo estão em progressão aritmética. Determine o ângulo mediano.

3. Se $3 - x$, $-x$, $\sqrt{9 - x}$.... é uma progressão aritmética, determine $x$ e calcule o quinto termo.

4. Calcule a soma dos termos da progressão aritmética $2, 5, 8, 11, \ldots$ desde o 25º até o 41º termo, inclusive.

5. Calcule a soma de todos os inteiros que divididos por 11 dão resto 7 e então compreendidos entre 200 e 400.

6. Quantos são os inteiros, compreendidos entre 100 e 500, que não são divisíveis nem por 2, nem por 3 nem por 5? Quanto vale a soma desses inteiros?

7. Quanto vale o produto $(a)(aq)(aq^2)(aq^3)\ldots(aq^{n-1})$?

8. Determine o maior valor que pode ter a razão de uma progressão aritmética que admita os números 32, 227 e 942 como termos da progressão.

9. De quantos modos o números 100 pode ser representado como uma soma de dois ou mais inteiros consecutivos? E como soma de dois ou mais naturais consecutivos?

10. Um quadrado mágico de ordem $n$ é uma matriz $n \times n$, cujos elementos são os inteiros $1, 2, \ldots, n^2$, sem repetir nenhum, tal que todas as linhas e todas as colunas têm a mesma soma. O valor dessa soma é chamado de constante mágica. Por exemplo, os quadrados

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 17 & 24 & 1 & 8 & 15 \\ 23 & 5 & 7 & 14 & 16 \\ 4 & 6 & 13 & 20 & 22 \\ 10 & 12 & 19 & 21 & 3 \\ 11 & 18 & 25 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

são mágicos, com constantes mágicas respectivamente iguais a 15, 15 e 65. Alias, os dois últimos são hipermágicos, pois as linhas, colunas e também as diagonais têm a mesma soma. Calcule a constante mágica de um quadrado mágico de ordem $n$.

11. Os inteiros de 1 a 1000 são escritos ordenadamente em torno de um circulo. Partindo de 1, riscamos os números de 15 em 15, isto é, riscamos 1, 16, 31,... O processo continua até se atingir um número já previamente riscado. Quantos números sobram sem riscos?

12. Podem os números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ pertencer a uma mesma progressão aritmética?

13. Suprimindo um dos elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, a média aritmética dos elementos restantes é 16,1. Determine o valor de $n$ e qual foi o elemento suprimido.

14. Um bem, cujo valor hoje é de R$8.000,00, desvaloriza-se de tal forma que seu valor daqui a 4 anos será de R$2.000,00. Supondo constante a desvalorização anual, qual será o valor do bem daqui a 3 anos?

15. Um bem, cujo valor hoje é de R$8.000,00, desvaloriza-se de tal forma que seu valor daqui a 4 anos será de R$2.000,00. Supondo que o valor do bem cai segundo uma linha reta, determine o valor do bem daqui a 3 anos.

16. Calcule a soma de todas as frações irredutíveis, da forma $\frac{p}{72}$, que pertençam ao intervalo $[4, 7]$.

17. Qual a maior potência de 7 que divide 1000!?

18. Em quantos zeros termina o número resultante do cálculo de 1000!?

19. Calcule o valor das somas dos $n$ primeiros termos das seqüencias:

    a) $1^3, 2^3, 3^3, \ldots$

    b) $1 \cdot 4, 3 \cdot 7, 5 \cdot 10, 7 \cdot 13, \ldots$

20. Representando por $\lfloor x \rfloor$ a parte inteira do real $x$, isto é, o maior número inteiro que é menor que ou igual a $x$ e por $\{x\}$ o inteiro mais próximo do real $x$, determine:

    a) $\lfloor\sqrt{1}\rfloor + \lfloor\sqrt{2}\rfloor + \lfloor\sqrt{3}\rfloor + \cdots + \lfloor\sqrt{n^2 - 1}\rfloor$

    b) $\lfloor\sqrt[3]{2}\rfloor + \lfloor\sqrt[3]{2}\rfloor + \lfloor\sqrt[3]{3}\rfloor + \cdots + \lfloor\sqrt[3]{n^3 - 1}\rfloor$

    c) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1000}}$

    d) $\{\sqrt{1}\} + \{\sqrt{2}\} + \{\sqrt{3}\} + \cdots + \{\sqrt{1000}\}$

21. Prove que a soma de todos os inteiros positivos de $n$ dígitos, $n > 2$, é igual ao número $494\underline{99\ldots9}55\underline{00\ldots0}$, no qual há $n - 3$ dígitos sublinhados se são iguais a 9 e $n - 2$ dígitos sublinhados que são iguais a 0.

22. Determine o primeiro termo e a razão da progressão aritmética na qual a soma dos $n$ primeiros termos é, para todo $n$: a) $S_n = 2n^2 + n$ b) $S_n = n^2 + n + 1$.

23. Determine no quadrado abaixo:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 3 | 5 | | | |
| 7 | 9 | 11 | | |
| 13 | 15 | 17 | 19 | |
| 21 | 23 | 25 | 27 | 29 |
| ..... | ..... | ..... | ..... | ..... |

a) o primeiro elemento da 31ª linha.

b) a soma dos elementos da 31ª linha.

24. Considere um jogo entre duas pessoas com as seguintes regras:

i) Na primeira jogda, o primeiro jogador escolhe um número no conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e diz esse número.

ii) As pessoas jogam alternadamente.

iii) Cada pessoa ao jogar escolhe um elemento de $A$, soma-o ao número dito pela pessoa anterior e diz a soma.

iv) Ganha quem disser 63.

Qual dos jogadores tem uma estratégia vencedora e qual é essa estratégia?

25. Refaça o exercício anterior para o caso do vencedor ser quem disser 64.

26. Refaça o exercício 24) para o conjunto $\{3, 4, 5, 6\}$

27. Mostre que no exercício 24), se o conjunto fosse $A = \{3, 5, 6, 7\}$, o segundo jogador tem uma estratégia que impede o primeiro jogador de ganhar.

28. Na primeira fase do campeonato brasileiro de futebol, que é disputado por 24 clubes, quaisquer dos times jogam entre si uma única vez. Quantos jogos há?

29. Uma bobina de papel tem raio interno 5cm, raio externo 10cm e a espessura do papel é 0,01cm. Qual é o comprimento da bobina desenrolada?

30. Dividem-se os números naturais em blocos do modo seguinte: (1), (2,3) (4,5,6) (7,8,9,10) (11,12,13,15).... Em seguida suprimem-se os blocos que contém um

número par de elementos, formando-se o quadro:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 4 | 5 | 6 | | |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |

Determine

a) o primeiro elemento da linha $k$.

b) o elemento central da linha $k$.

c) a soma dos elementos da linha $k$.

d) a soma dos elementos das $k$ primeiras linhas.

31. Qual é o número máximo de regiões em que $n$ retas podem dividir o plano?

32. Prove: se $a_n$ é um polinômio de grau $p$ estão $\Delta a_n$ é um polinômio de grau $p-1$.

33. Prove o corolário do teorema 1.

34. Quantos são os termos comuns às progressões aritméticas (2, 5, 8, 11, ..., 332) e (7, 12, 17, 22, ..., 157)?

35. Há dois tipos de anos bissextos: os que são múltiplos de 4 mas não de 100 e os que são múltiplos de 400.

a) Quantos são os anos bissextos entre 1997 e 2401?

b) Se 1º de janeiro de 1997 foi quarta-feira, que dia será 1º de janeiro de 2500?

c) Qual o primeiro ano, a partir de 1997, no qual o 1º de janeiro será também quarta-feira?

d) Escolhido um ano ao acaso, qual a probabilidade dele ser bissexto?

36. Benjamim começou a colecionar calendários em 1979. Hoje, sua coleção já tem alguns duplicadas - por exemplo, o calendário de 1985 é igual ao de 1991 - mas ainda não está completa.

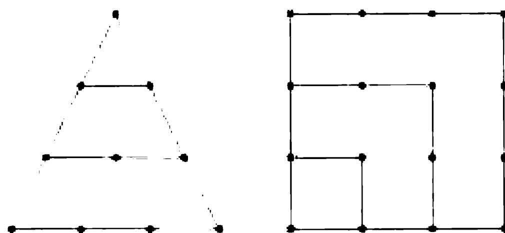
a) Em que ano Benjamim completará sua coleção?

b) Quando a coleção estiver completa, quantos calendários diferentes nela haverá?

37. A razão entre a soma dos $n$ primeiros termos de duas progressões aritméticas é $\frac{2n+3}{4n-1}$, para todo valor de $n$. Quanto vale a razão entre seus termos de ordem $n$?

38. O número triangular $T_n$ primeiros termos da progressão aritmética 1,2,3,4,.... O número quadrangular $Q_n$ é definido como a soma dos $n$ primeiros termos da progressão aritmética 1,3,5,7,.... Analogamente são definidos números pentagonais, hexagonais, etc. A figura abaixo justifica essa denominação.

Determine o número $j$-gonal de ordem $n$.



39. Mostre que se $\Delta a_k = \Delta b_k$ então $a_k - b_k$ é constante.

40. Se $a \neq 1$, determine $\Delta a^k$.

41. Se $a \neq 1$, determine $\Delta^{-1} a^k$.

42. Use o teorema fundamental da somação para calcular:

a) $\sum_{k=1}^{n} 3^k$.

b) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$.

c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$.

## Seção 1.2

1. Aumentos sucessivos de 10% e 20% equivalem a um aumento único de quanto?

2. Descontos sucessivos de 10% e 20% equivalem a um desconto único de quanto?

3. Um aumento de 10% seguido de um desconto de 20% equivale a um desconto único de de quanto?

4. Aumentando sua velocidade em 60%, de quanto você diminui o tempo de viajem?

5. Um decrescimento mensal de 5% gera um decrescimento anual de quanto?

6. O período de um pêndulo simples é diretamente proporcional à raiz quadrada do seu comprimento. De quanto devemos aumentar o comprimento para aumentar em 20% o período?

7. Mantida constante a temperatura, a pressão de um gás perfeito é inversamente proporcional a seu volume. De quanto aumenta a pressão quando reduzimos de 20% o volume?

8. Se a base de um retângulo aumenta de 10% e a altura diminui de 10%, de quanto aumenta a área?

9. Um carro novo custa R$ 18.000,00 e, com 4 anos de uso, vale R$ 12.000,00. Supondo que o valor decresça a uma taxa anual constante, determine o valor do carro com 1 ano de uso.

10. Os lados de um triângulo retângulo formam uma progressão geométrica crescente. Determine a razão dessa progressão.

11. Os lados de um triângulo estão em progressão geométrica. Entre que valores pode variar a razão?

12. Qual o quarto termo da progressão geométrica $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[6]{2}, \ldots$?

13. Determine três números em progressão geométrica, conhecendo sua soma 19 e a soma de seus quadrados 133.

14. A soma de três números em progressão geométrica é 19. Subtraindo-se 1 ao primeiro, eles passam a formar uma progressão aritmética. Calcule-os.

15. Quatro números são tais que os três primeiros formam uma progressão aritmética de razão 6, os três últimos uma progressão geométrica e o primeiro número é igual ao quarto. Determine-os.

16. Número perfeito é aquele que é igual à metade da soma dos seus divisores positivos. Por exemplo, 6 é perfeito pois a soma dos seus divisores é 1+2+3+6=12. Prove que, se $2^p - 1$ é um número primo, então $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ é um número perfeito.

17. Calcule o valor da soma de $n$ parcelas $1 + 11 + \cdots + 111 \ldots 1$.

18. Mostre que o número $444\ldots488\ldots89$, formado por $n$ dígitos iguais a 4, $n-1$ dígitos iguais a 8 e um dígito igual a 9, é um quadrado perfeito. Determine sua raiz quadrada.

19. A espessura de uma folha de estanho é 0,1mm. Forma-se uma pilha de folhas colocando-se uma folha na primeira vez e, em cada uma das vezes seguintes, tantas quantas já houverem sido colocadas interiormente. Depois de 33 dessas operações, a altura da pilha será, aproximadamente:

    a) a altura de um poste de luz.
    b) a altura de um prédio de 40 andares.
    c) o comprimento da praia de Copacabana.
    d) a distancia Rio-São Paulo.
    e) o comprimento do equador terrestre.

20. Um garrafão contem $p$ litros de vinho. Retira-se um litro de vinho do garrafão e se acrescenta um litro de água, obtendo-se uma mistura homogênea; retira-se, a seguir um litro da mistura e acrescenta-se um litro de água e assim por diante. Qual a quantidade de vinho que restará no garrafão após $n$ dessas operações?

21. Calcule a soma dos divisores de 12.600 que sejam:

    a) positivos.
    b) ímpares e positivos.

22. Determine as geratrizes das dízimas periódicas:

a) $0,141414141\ldots$

b) $0,345454545\ldots$

c) $0,999999999\ldots$

d) $1,711111111\ldots$

23. Determine os limites das somas abaixo:

a) $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \cdots$

b) $\frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{2}{7^4} + \frac{1}{7^5} + \frac{2}{7^6} + \cdots$

c) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \frac{9}{32} + \cdots$

d) $1 + 2x + 3x^2 + 4x^4 + \cdots - 1 < x < 1.$

e) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \cdots$

24. Larga-se uma bola de uma altura de 5m. Após cada choque com o solo, ela recupera apenas $4/9$ da altura anterior. Determine:

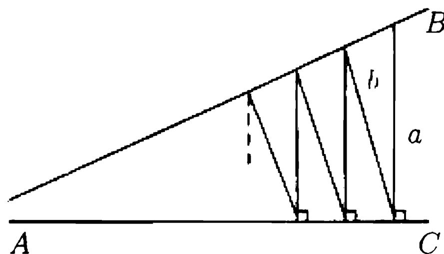
a) a distancia total percorrida pela bola.

b) o tempo gasto pela bola até parar.

25. Na figura abaixo temos uma linha poligonal, de lados ora perpendiculares a $AB$, ora perpendiculares a $AC$. Sendo $a$ e $b$, respectivamente, os dois primeiros lado da poligonal, pede-se determinar:

a) o comprimento da mesma.

b) o comprimento do $n$-ésimo lado da poligonal.

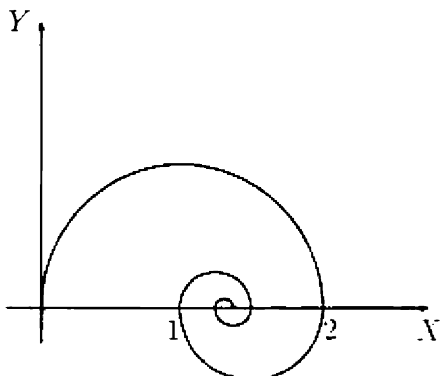



26. Na figura abaixo temos uma espiral formada por semicírculos cujos centros pertencem ao eixo das abscissas. Se o raio do primeiro semicírculo é igual a 1

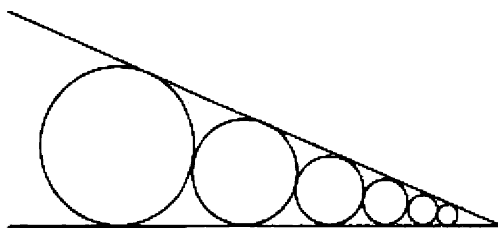
e o raio de cada semicírculo é igual à metade do raio do semicírculo anterior, determine:

a) o comprimento da espiral.

b) a abscissa do ponto $P$, ponto assintótico da espiral.




27. Na figura abaixo temos uma seqüencia de círculos tangentes a duas retas. O raio do primeiro círculo é 1 e o raio do segundo é $r < 1$. Cada círculo tangencia eternamente o círculo anterior. Determine a soma dos raios dos $n$ primeiros círculos.



28. Uma faculdade recebe todos os anos 300 alunos novos no primeiro semestre e 200 alunos novos no segundo semestre. 30% dos alunos são reprovados no primeiro período e repetem o período no semestre seguinte. Sendo $a_n$ e $b_n$, respectivamente, o número de alunos do primeiro período no primeiro e no segundo semestres do ano $n$, calcule $\lim a_n$ e $\lim b_n$.

29. Seja $S_n$ a soma das áreas dos $n$ primeiros quadrados obtidos a partir de um quadrado $Q_1$ de lado 1 pelo seguinte processo: "os vértices do quadrado $Q_{n+1}$ são pontos medidos dos lados de $Q_n$". Determine quais das afirmações abaixo são verdadeiras:

   1) É possível escolher $S_n$ de modo que $S_n > 1,9$.
   2) É possível escolher $S_n$ de modo que $S_n > 2$.
   3) É possível escolher $S_n$ de modo que $S_n > 2,1$.
   4) É possível escolher $S_n$ de modo que $S_n = 2$.
   5) É possível escolher $S_n$ de modo que $S_n = 1,75$.

30. Calcule $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^{2n}}$.

31. Sendo $x$ e $y$ positivos, calcule:

   a) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}}}$
   b) $\sqrt{x\sqrt{y\sqrt{x\sqrt{y\ldots}}}}$

32. Começando com um segmento de tamanho 1, dividimo-lo em três partes iguais e retiramos o interior da parte central, obtendo dois segmentos de comprimento 1/3. Repetimos agora essa operação com cada um desses segmentos e assim por diante. Sendo $S_n$ a soma dos comprimentos dos intervalos que restaram depois de $n$ dessas operações, determine:

   a) O valor de $S_n$.
   b) O valor de $\lim S_n$.
   c) Certo livro, muito citado em aulas de análise de erros de livros didáticos, afirma que, ao final, o conjunto dos pontos não retirados é vazio. Isso é verdade?

33. Se $(a_n)$ é uma progressão geométrica de termos positivos, prove que $(b_n)$ definida por $b_n = \log a_n$ é uma progressão aritmética.

34. Se $(a_n)$ é uma progressão aritmética, prove que $(b_n)$ definida por $b_n = e^{a_n}$ é uma progressão geométrica.

35. O rádio-226 tem meia-vida (período de tempo em que metade da massa inicialmente presente se desintegra) de 1600 anos. A taxa de variação da massa é constante. Em quanto tempo a terça parte da massa inicialmente presente se desintegrará?

36. Sejam $a = 111\ldots1$ ($n$ dígitos iguais a 1) e $b = 100\ldots05$ ($n$ dígitos iguais a 0). Prove que $ab+1$ é um quadrado perfeito e determine sua raiz quadrada.

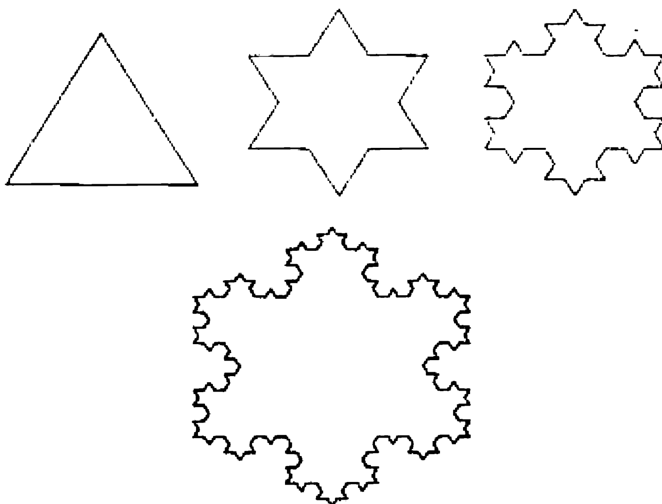
37. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Determine $A^n$.

38. A curva de Koch é obtida em estágios pelo processo seguinte:

   i) No estágio 0, ela é um triângulo equilátero de lado 1.

   ii) O estágio $n+1$ é obtido a partir de estágio $n$, dividindo cada lado em três partes iguais, construindo exatamente sobre a parte central um triângulo equilátero e suprimindo então a parte central (ver figura abaixo). Sendo $P_n$ e $A_n$ respectivamente o perímetro e a área do $n$-ésimo estágio da curva de Koch, determine:

a) $P_n$. b) $A_n$. c) $\lim P_n$. d) $\lim A_n$.



39. Pitágoras[1], que estudou a geração dos sons, observou que duas cordas vibrantes, cujos comprimentos estiverem na razão de 1 para 2, soariam em uníssono. Hoje sabemos que a razão das freqüências dos sons emitidas por essas cordas seria a razão inversa de seus comprimentos, isto é, de 2 para 1 e que duas cordas vibram ao uníssono se e só se a razão de seus comprimentos é uma potência inteira de 2.

    A freqüência da nota lá-padrão (o lá central do piano) é 440 Hz e a freqüência do lá seguinte, mais agudo, é 880 Hz (Hz é a abreviatura de hertz, unidade de freqüência que significa ciclo por segundo).

    A escala musical ocidental (de J.S. Bach para cá), dita cromática, divide esse intervalo em doze semitons iguais, isto é, tais que a razão das freqüências de notas consecutivas é constante.

    Sabendo que essas notas são LÁ - LÁ# - SI - DÓ - DÓ# - RÉ - RÉ# - MI - FÁ - FÁ# - SOL - SOL# - LÁ, determine:

    a) a freqüência desse dó, primeiro dó seguinte ao lá padrão.
    b) a freqüência do sinal de discar de um telefone, que é o primeiro sol anterior ao lá padrão.
    c) a nota cuja freqüência é 186 Hz.

40. A lei de Weber (Ernest Heinrich Weber; 1795-1878; fisiologista alemão), para resposta de serem humanos a estímulos físicos, declara que diferenças marcantes na resposta a um estimulo ocorrem para variações de intensidade do estimulo proporcionais ao próprio estímulo. Por exemplo, um homem, que sai de um ambiente iluminado para outro, só percebe uma variação da luminosidade se esta for superior a 2%; só distingue entre soluções salinas se a variação da salinidade for superior a 25%, etc...

    Fechner (Gustav Theodor Fechner; 1801-1887; físico e filosofo alemão) propôs um método de construção de escalas baseado na lei de Weber. Propôs que enquanto estímulos variassem em progressão geométrica, as medidas das respostas variassem em progressão aritmética.

    a) Mostre que numa escala de Fechner, as medidas da resposta $y$ e do estimulo $x$ se relacionam por $y = a + b \log x$.

[1] Pitágoras, Matemático de Samos, cerca de cinco séculos e meio antes de Cristo.

b) Uma das mais conhecidas escalas de Fechner é a que mede a sensação de ruido. Ela é definida por $L = 120 + 10\log[10]l$, onde $L$ é a medida da sensação de ruido em decimais (dB) e $l$ é a intensidade sonora, medida em $W/m^2$. Duas bandas de "heavy metal" provocam um ruido de quantos decibéis acima do ruido provocado por uma banda?

41. Determine o valor de:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$. b) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k$.

## 1.2 Soluções

### Seção 1.1

1. O aumento de um triângulo causa o aumento de dois palitos. logo, o número de palitos constitui uma progressão aritmética de razão 2. $a_n = a_1 + (n-1)r = 3 + (n-1)2 = 2n+1$.

2. Sejam $x-2r$, $x-r$, $x$, $x+r$, $x+2r$ os ângulos. A soma dos ângulos internos de um pentágono convexo é 540° e $x$, que é o ângulo mediano, vale 108°.

3. $= x = (3 - x) = \sqrt{9-x} - (-x) + -x - 3 = \sqrt{9-x}$

   Elevando ao quadrado (o que pode criar raízes estranhas),

   $x^2 + 6x + 9 = 9 - x$

   $x^2 + 7x = 0$

   As raízes dessa equação são 0 (que é estranha) e $-7$ (que satisfaz).

   Logo $x = -7$.

   A progressão é $10, 7, 4, 1, -2, \ldots$

   Logo, $a_5 = -2$

4. $a_{25} = a_1 + 24r = 2 + 24.3 = 74$

   $a_41 = a_1 + 40r = 2 + 24.3 = 122$

   Observe que do 25° termo, inclusive, ao 41°, inclusive, há $41 - 24 = 17$ termos.

$$S = \frac{(a_{25} + a_{41})17}{2} = \frac{74 + 122)17}{2} = 1666$$

5. $200 = 11.18 + 2$; logo, $205 = 11.18 + 7$.

$400 = 11.36 + 4 = 11.35 + 15$; logo, $392 = 11.35 + 7$

As parcelas a somar são $11.18+7, 11.19+7, 11.20+7, \ldots, 11.35+7$, que formam uma progressão aritmética de razão 11, cujo primeiro termo é 205, cujo ultimo termo é 392 e cujo número de termos é $35 - 17 = 18$.

A soma vale $S = \dfrac{(205+392)18}{2} = 5373$

6. Total: 101, 102,...,499. São $499 - 101 + 1 = 399$ números

Divisíveis por 2: 102, 104,..., 498. São 249-51+1=199 números.

Divisíveis por 3: 102, 105,..., 498. São 166-34+1=133 números.

Divisíveis por 5: 105, 110,..., 495. São 299-21+1=79 números.

Divisíveis por 6: 102, 108,..., 498. São 82-17+1=67 números.

Divisíveis por 10: 110, 120,..., 490. São 49-11+1=39 números.

Divisíveis por 15: 105, 120,..., 495. São 33-7+1=27 números.

Divisíveis por 30: 120, 150,..., 480. São 16-4+1=13 números.

Preenchendo o diagramam de dentro para fora encontramos:

A resposta é 108

Divisíveis por 5: 105, 110,..., 495. A soma vale $\dfrac{105+495}{2} \cdot 79 = 23700$.

Divisíveis por 6: 102, 108,..., 498. A soma vale $\dfrac{102+498}{2} \cdot 67 = 20100$.

Divisíveis por 10: 110, 120,..., 490. A soma vale $\dfrac{110+490}{2} \cdot 39 = 11700$.

Divisíveis por 15: 105, 120,..., 495. A soma vale $\dfrac{105+495}{2} \cdot 27 = 8100$.

Divisíveis por 30: 120, 150,..., 480. A soma vale $\dfrac{120+480}{2} \cdot 13 = 3900$.

Preenchendo o diagrama de dentro para fora encontramos:

A resposta é 32 400.

7. $a.(aq).(aq^2).(aq^3).\ldots.(aq^{n-1}) = a^n.q^{\frac{1+2+3+\cdots+n-1}{2}} = a^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$

8. Se para passar do 32 para o 227 e para o 942 avançamos, respectivamente, $p$ e $q$ termos $227 = 32 + pr$ e $942 = 32 + qr$. Daí, $\frac{p}{q} = \frac{195}{910} = \frac{3}{14}$. Como $p$ e $q$ são

inteiros, é fácil descobrir todos os valores possíveis de $p$ e $q$: basta descobrir as frações equivalentes a $\frac{3}{14}$. Como queremos o maior valor de $r$, devemos ter $p$ e $q$ mínimos, ou seja, $p = 3$ e $q = 14$. Substituindo, $r = 65$.

9. Se $100 = (a+1) + (a+2) + \cdots + (a+n) = \frac{(2a+n+1)n}{2}$, e $n > 1$, então $200 = (2a+n+1)n$.

   Devemos descobrir as decomposições de 200 como produto de dois inteiros positivos. Para ganhar tempo, observe que $n$ e $2a+n+1$ têm paridades diferentes; logo, basta considerar as decomposições como produto de um inteiro par por um ímpar. Como 200=8.25, os únicos divisores ímpares de 200 são 1, 5 e 25.

   Daí resulta as soluções:

| $n$ | $2a+n+1$ | $a$ | decomposição |
|---|---|---|---|
| 5 | 40 | 17 | $18+19+20+21+22$ |
| 25 | 8 | -9 | $-8-7-6-\cdots+14+15+16$ |
| 8 | 25 | 8 | $9+10+11+12+13+14+15+16$ |
| 40 | 5 | -18 | $-17-16-15-\cdots+20+21+22$ |
| 200 | 1 | -100 | $-99-98-97-\cdots+97+98+99+100$ |

   Há portanto, 5 decomposições, em duas das quais as parcelas são naturais.

10. A soma de todos os elementos da matriz é $1+2+\cdots+n^2 = \frac{(n^2+1)n^2}{2}$. Como a soma de todos os elementos é igual a $n$ vezes a constante mágica, a constante mágica vale $C = \frac{1}{n} \cdot \frac{(n^2+1)n^2}{2} = \frac{n(n^2+1)}{2}$.

11. Na primeira volta são riscados

    $1, 16, 31, \ldots, 991$ (múltiplos de 15 aumentados de 1; 67 números)

    Na segunda volta são riscados

    $6, 21, 36, \ldots, 996$ (múltiplos de 15 aumentados de 6; 67 números)

    Na terceira volta são riscados

    $11, 26, 41, \ldots, 986$ (múltiplos de 15 aumentados de 11; 67 números)

    São riscados $67 + 67 + 66 = 220$ números. Sobram 800 números não riscados.

    **Outra solução:**

Como $1000/15 = 200/3$, ligados os pontos riscados formamos um polígono estrelado de 200 vértices e espécie 3. Sobram, portanto, 800 números não riscados.

12. Não. Se pertencem, existiram inteiros $p$ e $q$ tais que $\sqrt{e} = \sqrt{2} + pr$ e $\sqrt{5} = \sqrt{2} + qr$. Daí, $\frac{q}{p} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \sqrt{15} - \sqrt{6} - \sqrt{10} + 2$ seria racional, o que é absurdo.

13. Considerando a menor e a maior das médias que podem ser obtidas,

$$\frac{1+2+\cdots+(n-1)}{n-1} \leq 16.1 \leq \frac{2+3+\cdots+n}{(n-1)}$$

$\frac{n}{2} \leq 16,1 \leq \frac{n+2}{2}$

$30,2 \leq n \leq 32,2$

$n$ só pode valer 31 ou 32.

Chamemos de $k$ o número suprimido.

Se $n = 31$,

$1 + 2 + \cdots + 31 - k = 483$

$496 - k - 483$

$k = 13$

Se $n = 32$, $\frac{1+2+\cdots+32-k}{31} = 16,1$

$1 + \cdots + 32 - k = 499,1$, o que é absurdo, pois $k$ não seria inteiro.

Logo, $n = 31$; o número suprimido é igual a 13.

14. A desvalorização total é de R$ 6.000,00 e a desvalorização anual é de R$ 6.000,00/4 = R$ 1.500,00. Portanto, em três anos a desvalorização foi de R$ 4.500,00 e o valor do bem será R$ 8.000,00 - R$ 4.500,00 = R$ 3.500,00.

15. Este problema é igual ao anterior.

16. A soma de todas as frações da forma $\frac{p}{72}$ que pertencem ao intervalo $[4,7]$ é $\frac{288+289+\cdots+504}{74} = 1193,5$.

Como $72 = 2^3 \cdot 3^2$, as frações irredutíveis devem ter p relativamente primo com 2 e com 3.

Devemos, portanto, descontar as frações que tenham numerador par os múltiplos de 3.

A soma das frações de numerador par é

$$\frac{288+290+\cdots+504}{72}=\frac{144+145+\cdots+252}{36}=599,5$$

A soma das frações de numerador múltiplo de 3 é

$$\frac{288+290+\cdots+504}{72}=\frac{144+145+\cdots+168}{24}=401,4$$

A soma das frações de numerador múltiplo de 6, que são as que têm numerador par e múltiplo de 3 e, portanto, então incluídas nos dois grupos acima, é

$$\frac{288+290+\cdots+504}{72}=\frac{48+49+\cdots+84}{12}=203,5$$

A soma das frações redutíveis é $599,5+401,5-203,5=797,5$ e a soma das irredutíveis é $1193,5-797,5=396$.

17. Vamos descobrir o expoente de 7 na decomposição em fatores primos de 1000!. Usaremos o símbolo para significar a igualdade dos expoentes de 7 na decomposição em fatores primos.

$1000! = 1.2.3.4.\ldots.1000 \sim 7.14.21.\ldots.994$

$= 7^{142}.(1.2.3.\ldots.142) \sim 7^{142}.(7.14.21.\ldots.140$

$) = 7^{142}.7^{20}(1.2.3.\ldots.20) \sim 7^{162}.(7.14) \sim 7^{164}$. A maior potência é $7^{164}$.

18. Devemos determinar a maior potência de 10 que divide 1000!. Para isso, basta descobrir o expoente de 5 na decomposição em fatores primos de 1000!. Usaremos o símbolo para significar a igualdade dos expoentes de 5 na decomposição em fatores primos.

$1000! = 1.2.3.4.\ldots.1000 \sim 5.10.15.\ldots.1000$

$\sim 5^{200}.(1.2.3.\ldots.200) \sim 5^{200}.(5.10.15.\ldots.200)$

$\sim 5^{200}.5^{40}.(1.2.3.\ldots.40) \sim 5^{240}.(5.10.15.\ldots.40) \sim$

$5^{240}.58.(1.2.3.\ldots.8)\ 5^{248}.(5) = 5^{249}$.1000! termina por 249 zeros.

19. a) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn + E$

Para $n = 1, 2, 3, 4$ e 5 obtemos

$A + B + C + D + E = 1$

$16A + 8B + 4C + 2D + E = 9$

$81A + 27B + 9C + 3D + E = 36$

$156A + 64B + 16C + 4D + E = 100$

$625A + 125B + 25C + 5D + E = 225$

Subtraindo de cada equação a anterior,

$+7B + 3C + D = 8$

$65A + 19B + 5C + D = 27$

$175A + 37B + 7C + D = 64$

$369A + 61B + 9C + D = 125$

Subtraindo de cada equação a anterior,

$50A + 12B + 2C = 19$

$110A + 18B + 2C = 37$

$194A + 24B + 2C = 61$

Subtraindo de cada equação a anterior,

$60A + 6B = 18$

$84A + 6B = 24$

Subtraindo, $24A = 6$. Daí, $A = \frac{1}{4}$ e, subtraindo, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{4}$, $D = 0$, $E = 0$.

Logo, $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

b) $1.4 + 3.7 + 5.10 + \cdots + (2n-1)(3n+1) = An^3 + Bn^2 + Cn + D$

Para $n = 1, 2, 3, 4$ e 5, obtemos

$A + B + C + D = 4$

$8A + 4B + 2C + D = 25$

$27A + 9B + 3C + D = 75$

$64A + 16B + 4C + D = 166$

Subtraindo de cada equação a anterior,

$7A + 3B + C = 21$

$19A + 5B + C = 50$

$37A + 7B + C = 91$

Subtraindo de cada equação a anterior,

$12A + 2B = 29$

$18A + 2B = 41$

Subtraindo, $6A = 12$ e $A = 2$.

Substituindo, $B = \frac{5}{2}$, $C = -\frac{1}{2}$, $D = 0$.

Logo, $1.4+3.7+5.10+\cdots+(2n-1)(3n+1) = 2n^3+\frac{5}{2}n^2-\frac{1}{2}n = \frac{n(4n^2+5n-1)}{2}$.

20. a) $\lfloor X \rfloor = k$, $k \geq 0$, se e somente se $k \leq X < k+1$.

$\lfloor \sqrt{X} \rfloor = k$, $k \geq 0$, se e somente se $k^2 \leq X < k^2 + 2k + 1$.

Há, portanto, $2k+1$ inteiros positivos $x$ para os quais $\lfloor \sqrt{X} \rfloor = k$, $k \geq 0$.

A soma pedida é $\sum_{k=1}^{n-1}(2+1)k = 2\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} k =$

$= 2\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(n-1)(4n-1)}{6}$.

b) Se $X$ é inteiro positivo, $\lfloor \sqrt{3}[X] \rfloor = k$, $k \geq 0$, se e somente se $k \leq \sqrt[3]{X} < k+1$, ou seja, $k^3 \leq X < k^3+3k^2+3l+1$. Há $3k^2+3k+1$ inteiros positivos $X$ tais que $\lfloor \sqrt[3]{X} \rfloor = k$.

A soma pedida é $\sum_{k=1}^{n-1} k.(3k^2+3k+1) = An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn + E$

Para $n = 2, 3, 4, 5$ e $6$, obtemos

$16A + 8B + 4C + 2D + E = 7$

$81A + 27B + 9C + 3D + E = 45$

$256A + 64B + 16C + 4D + E = 156$

$625A + 125B + 25C + 5D + E = 400$

$1296A + 216B + 36C + 6D + E = 855$

Resolvendo o sistema $A = \frac{3}{4}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = -\frac{1}{4}$, $D = 0$, $E = 0$.

A soma vale $\frac{3}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^3 - \frac{1}{4}n^2 - \frac{n^2(n-1)(2n+1)}{4}$

c) Se $X$ é inteiro positivo, $\{\sqrt{X}\} = k$, $k \geq 0$, se e somente se $k - \frac{1}{2} < \sqrt{X} < k+\frac{1}{2}$ ou seja, $k^2-k+\frac{1}{4} < X < k^2+k+\frac{1}{4}$, ou ainda, $k^2-k+1 \leq X \leq k^2+k$. Há $2k$ inteiros positivos $X$ tais que $\{\sqrt{X}\} = k$.

As parcelas correspondentes a $X$ até 992, inclusive, têm inteiros mais próximos variando de 1 até 31 e as parcelas de 993 a 1000, têm inteiro mais próximo igual a 32. É preciso cuidado porque a soma não abrange todos os números que têm o inteiro mais próximo igual a 32.

A soma pedida é $\sum_{k=1}^{31} 2k.\frac{1}{k} + \frac{1}{32}.(1000 - 992) = 62,25.$

d) A soma pedida é $\sum_{k=1}^{31} 2k.k + 32.(1000 - 992) = 2\frac{31.32.63}{6} + 256 = 21.088$ (veja o exemplo 19).

21. A soma pedida é a soma de uma progressão aritmética de razão 1, com primeiro termo igual a $10^{n-1}$ e último termo igual a $10^n - 1$.

$$S = \frac{(10^{n-1} + 10^n - 1)(10^n - 10^{n-1})}{2} = \frac{10^{2n} - 10^{2n-2} - 10^n + 10^{n+1}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}[10^{2n} + 10^{n-1}] - \frac{1}{2}[10^{2n-2} + 10^n]$$

$$= \frac{1}{2}.\overbrace{1000\ldots00}^{n-1}\overbrace{1000\ldots00}^{n} - \frac{1}{2}.\overbrace{1000\ldots001}^{n-4}\overbrace{1000\ldots00}^{n+1}$$

$$= \frac{1}{2}.98\overbrace{999\ldots99}^{n\ 3}\overbrace{1000\ldots00}^{n} = 494\overbrace{999\ldots99}^{n-3}55\overbrace{000\ldots00}^{n-1}$$

22. a) $2n^2 + n = \frac{a_1+a_n)n}{2}$; $4n + 2 = a_1 + a_1 + (n-1)r = rn + 2a_1 - r$, para todo $n$. Esses polinômios em $n$ devem ter coeficientes iguais. Daí, $r = 4$ e $2a_1 - r = 2$, ou seja, $a_1 = 3$; $r = 4$.

b) $n^2 + n + 1 = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$; $2n^2 + 2n + 2 = na_1 + na_n$; $2n^2 + 2n + 2 = na_1 + na_1 + n(n-1)r - rn^2 + (2a_1 - r)n$, para todo $n$. Esses polinômios em $n$ devem ter coeficientes iguais. Daí, $r = 2$, $2a_1 - r = 2$ e $2 = 0$, o que é absurdo.

Não existe tal progressão.

c) O primeiro elemento da linha de número 31 é precedido por $1 + \cdots + 30 = \frac{(1+30).30}{2} = 465$. O primeiro elemento da linha de número 31 é o elemento $a_{466}$ da progressão aritmética dos números ímpares. $a_{466} = a_1 + 456r = 1 + 465.2 = 931$.

d) O último elemento da linha de números 31 é $a_{496} = a_1 + 495r = 1 + 495.2 = 991$.

A soma vale $S = \frac{981 + 991).31}{2} = 29791.$

23. Quem disser 55 ganha o jogo, pois não permite ao adversário alcançar 63 e, escolhendo o complemento para 8 do número escolhido pelo adversário, alcançará o 63.

Analogamente, as posições ganhadoras são 63, 55, 47, 39, 31, 23, 15, 7. O primeiro jogador tem a estratégia ganhadora: começar dizendo 7 e, a partir daí, escolher sempre o complemento para 8 do número escolhido pelo adversário.

24. Quem disser 56 ganha o jogo, pois não permite ao adversário alcançar 64 e, escolhendo o complemento para 8 do número escolhido pelo adversário, alcançará o 64.

    Analogamente, as posições ganhadoras são 64, 56, 48, 40, 32, 24, 16, 8. O segundo jogador ganha escolhendo sempre o complemento para 8 do número escolhido pelo adversário.

25. Quem disser 54 ganha o jogo, pois não permite ao advesário alcançar 63 e, escolhendo o complemento para 9 do número escolhido pelo adversário, alcançará o 63.

    Analogamente, as posições ganhadoras são 63, 54, 45, 36, 27, 18, 9.

    O segundo jogador ganha escolhendo sempre o complemento para 9 do número escolhido pelo adversário.

26. Recebendo o jogo em 51, 59, 60, 61 ou 62, jogue 3. Recebendo em 50, 57 ou 58, jogue 5. Recebendo em 52, 54, 55 ou 56, jogue 7. Recebendo em 49 ou 53, jogue 6. Recebendo abaixo de 49, jogue de qualquer jeito.

27. O botafogo joga 23 vezes, o Santos joga (sem contar a partida contra o Botafogo, já contada) 22 vezes etc. A resposta é $23 + 22 + 21 + \cdots + 1 + 0 = \frac{(23+0).24}{12} = 276$.

28. A área da superfície da bobina enrolada é a área de uma circular $\pi(10^2 - 5^5) = 75\pi\text{cm}^2$. A área da bobina desenrolada é $x.0,01$cm, sendo $x$ o comprimento da bobina desenrolada. Daí, $x.0,01\text{cm} \equiv 236\text{cm}^2$, $x \doteq 23600\text{cm} = 236\text{m}$.

    Aproximadamente 236m.

29. a) Se não consideramos as linhas suprimidas, teríamos a progressão aritmética dos números naturais e o primeiro elemento da linha $k$ seria precedido por $1+2+\cdots+(k-1) = \frac{k(k-1)}{2}$ naturais, sendo, portanto, igual a $1+\frac{k(k-1)}{2} = \frac{k^2-k+2}{2}$

Com a supressão, o que passa e ser a linha $k$ é a antiga linha $2k - 1$. Logo, o primeiro elemento da linha $k$ é

$$\frac{(2k-1)^2 - (2k-1) + 2}{2} = 2k^2 - 3k + 2.$$

b) Como na linha $k$ há $2k - 1$ elementos, o elemento central é $2k^2 - 3k + 2 + (k-1) = 2k^2 - 2k + 1$.

c) Como os elemento da linha $k$ formam uma progressão aritmética, basta multiplicar o termo médio pela quantidade de termos.

A resposta é $(2k^2 - 2k + 1).(2k - 1) = 4k^3 - 6k\ 2 + 4k - 1$.

d) A soma pedida é $\sum_{n=1}^{k}(4n^3 - 6n^2 + 4n - 1) = \sum_{n=1}^{k}[n^4 - (n-1)^4] = k^4 - 0^4 = k^4$.

30. Se há $n$ retas, a colocação de mais uma reta cria $n+1$ novas regiões. Portanto, se $a_n$ é o número de regiões para $n$ retas, $a_{n+1} = a_n + (n+1)$. Trata-se, portanto, de uma progressão aritmética de segunda ordem.

$a_n = An^2 + Bn + C$

Como $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ e $a_3 = 7$, temos

$A + B + C = 2$

$4A + 2B + C = 4$

$9A + 3B + C = 7$

Resolvendo, $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = 1$

$a_n = \dfrac{n^2 + n + 2}{2}$.

31. $a_n = An^p + P(n)$, sendo $P(n)$ um polinômio de grau menor que ou igual a $p$.

$\Delta a_n = A(n+1)^p + P(n+1) - An^p - P(n)$, se é de grau menor que ou igual a $p$.

32. $F(k) = A_0 + A_1k + A_2k^2 + \cdots + A_pk^p$ $\sum_{k=1}^{n} F(k) = \sum_{k=1}^{n}(A_0 + A_1k + A_2k^2 + \cdots + A_pk^p) = A_0P_1(n) + A_1P_2(n) + A_2P_3(n) + \cdots + A_pP_{p+1}(n)$, sendo $P_j(n)$ polinômio de grau $n$, pelo teorema 1. Logo, é um polinômio de grau $p+1$ em $n$.

33. $a_n = 2 + 3(n-1) = 3n - 1,\ n - 1, 2, \ldots, 111.$

$b_m = 7 + 5(m-1) = 5m + 2,\ m = 1, 2, \ldots, 31.$

Ora, $a_n = b_m$ se e só se $3n - 1 - 5m - 2$, ou seja, $n = m + \dfrac{2m-1}{3}$.

$2m - 1$ deve ser múltiplo de 3. Os valores que $m$ pode ter são 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26 e 29.

A resposta é 10.

34. a) São múltiplos de 4 os anos 2000, 2004, 2008,..., 2400.

$a_n = a_1 + (n-1)r$

$2400 = 2000 + (n-1)4$

$n = 101$

Mas 2100, 2200, 2300 não são bissextos por serem múltiplos de 100, mas não de 400.

A resposta é 98.

b) Um ano não-bissexto é formado por 52 semanas e 1 dia e um ano bissexto é formado por 52 semanas e 2 dias. Se um ano não-bissexto começa numa segunda-feira, por exemplo, o ano seguinte começará numa terça; se for bissexto, o ano seguinte começará numa quarta.

De 1997 a 2500 são múltiplos de 4 os anos 2000, 2004, 2008,..., 2496, num total de 125 anos. Mas 2100, 2200 e 2300 não são bissextos por serem múltiplos de 100, mas não de 400. Há, portanto, 122 anos bissextos.

Se 1997 começou numa quarta-feira, 2500 começará $(2500 - 1997) + 122 = 625$ dias de semana depois. Como $625 = 7x89 + 2$ o ano 2500 começará numa sexta-feira.

c)

| 1997 | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| quarta | quinta | sexta | sábado | segunda | terça | quarta |

A resposta é 2003

d) Em cada bloco de 400 anos há 100 anos que são múltiplos de 4 e, destes, 3 não são bissextos por serem múltiplos de 100, mas não de 400. A resposta é $\dfrac{97}{400} = 0,2425$.

e) É fácil ver que a coleção se completará quando se completem os calendários dos anos bissextos. Se 1980 se iniciou por uma segunda, as tabelas mostram os dias iniciais dos demais anos bissextos e não-bissextos.

| 1980 | 1984 | 1988 | 1992 | 1996 | 2000 | 2004 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| segunda | sábado | quinta | terça | domingo | sexta | quarta |

| 1979 | 1981 | 1982 | 1983 | 1985 | 1986 | 1987 | 1989 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| domingo | quarta | quinta | sexta | segunda | terça | quarta | sábado |

A coleção se completara em 2004.

f) $\dfrac{(a_1 + a_n)\frac{\pi}{2}}{(b_1 + b_n)\frac{\pi}{2}} = \dfrac{2n+3}{4n \quad 1}$

$\dfrac{a_1 + a_n}{b_1 + b_n} = \dfrac{2n+3}{4n-1}$

$\dfrac{2a_1 + (n-1)r}{2b_1 + (n-1)r'} = \dfrac{2n+3}{4n-1}$

Pondo $n - 1 = 2(p-1)$

$\dfrac{2a_1 + 2(p-1)r}{2b_1 + 2(p-1)r'} = \dfrac{2(2p-1)+3}{4(2p-1)-1}$

$\dfrac{a_1 + (p-1)r}{b_1 + (p-1)r'} = \dfrac{4p+1}{8p-r}$

$\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{4n+1}{8n-5}$

35. $1 + (j-1) + (2j-3) + \cdots + [1 + (n-1).(j-2)] =$
$= \dfrac{1 + 1 + (n-1).(j-2)}{2}.n = \dfrac{n[(j-2)n - j + 4]}{2}.$

36. $\Delta a_k = \Delta b_k \Rightarrow a_{k+1} - a_k = b + k + 1 - k_k \Rightarrow a_{k+1} - b_{k+1} = a_k - b_k$ para todo $k$ e $a_k - b_k$ é constante.

37. $\Delta a^k = a^k.(a-1)$

$\delta \dfrac{a^k}{a-1} = a^k$

$\Delta^{-1} a^k = \frac{a^k}{a-1} + C$, $C$ sendo uma constante arbitraria.

38. a) $\sum 3^k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 3^k(3-1) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \Delta 3_k = \dfrac{3^{n+1}-3}{4}.$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k.k! = \sum_{k=1}^{n}[(k+1).k! - k!] = \sum_{k=1}^{n}[(k+1) - k"] = \sum_{k=1}^{n} \Delta k! = (n+1)! - 1.$

c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = -\sum_{k=1}^{n} \Delta \frac{1}{k} =$

$= -\left(\frac{1}{n+1} - 1\right) = \frac{n}{n+1}$

## Seção 1.2

1. $100 \to 1,1.100 = 110 \to 1,2.110 = 132$

   A resposta é 32%.

2. $100 \to 0,9.100 = 90 \to 0,8.90 = 72.$

   A resposta é 28%.

3. $100 \to 1,1.100 = 110 \to 0,8.110 = 88$

   A resposta é 12%.

4. Sejam $v$ e $t$, respectivamente,a velocidade antiga e o tempo gasto e sejam $v'$ e $t'$ a velocidade e o tempo depois do aumento.

   $vt = v't'$

   $vt = 1,6vt'$

   $t' = \frac{1}{1,6}t = 0.6251 = 62.5\%t$

   O tempo se reduz em 37,5%.

5. $1 + 1 = (1 + i)^n$

   $1 + I = (1 \quad 0,05)^{12}$

   $I = 0,95^{12} - 1 \equiv -0,46$

   Aproximadamente 46%.

6. Sejam $T$ o período e $\lambda$ o comprimento e sejam $T'$ o período e $\lambda'$ o comprimento depois da variação.

   $\frac{\sqrt{\lambda'}}{T'} = \frac{\sqrt{\lambda}}{T}$

   $\frac{\sqrt{\lambda}}{1.2T} = \frac{\sqrt{\lambda}}{T}$

   $\sqrt{\lambda'} = 1,2\sqrt{\lambda}$

$\lambda' = 1,44\lambda = 144\%\lambda$

Devemos aumentar de 44%

7. Sejam $P$ a pressão e $V$ o volume e sejam $P'$ a pressão e $V'$ o volume depois da variação.

$PV = P'V'$

$PV = P'.0,8V$

$P' = \frac{1}{0,8}P = 1,25P = 125\%P$

A pressão aumenta de 25%.

8. Sejam $S$, $b$ e $h$ a área, a base e a altura antes da variação e sejam $S'$, $b'$ e $h'$ a área, a base e a altura depois da variação.

$S' = b'.h' = 1,1b.0,9h = 0,99.b.h = 99\%S$

A área diminui de 1%.

9. Os valores formam uma progressão geométrica.

$a_4 = a_0.q^4$

$12000 = 18000q^4$

$q = \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$

$a_1 = a_0q = 18000\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$, ou seja, R\$ 16264,84.

10. Os lados são $a$, $aq$, $aq^2$. Pelo teorema de Pitágoras, $(aq^2)^2 = (aq)^2 + a^2$. Daí, $q^4 - q^2 - 1 = 0$ e, como $q > 0$, $q = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

11. Se a progressão é estritamente crescente, os lados $a$, $aq$, $aq^2$ satisfazem $q > 1$ e $aq^2 < aq + a$ ou seja, $q^2 - q - 1 < 0$. Ou seja, $1 < q < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

Se a progressão é estritamente decrescente, $\dfrac{2}{\sqrt{5}+1} < q < 1$, ou seja, $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} < q < 1$;

A resposta é $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} < q < \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

12. $q = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{6}}$

$a_4 = a_3.q = 2^{\frac{1}{6}}.2^{\frac{1}{6}} = 1$

13. Sejam $a$, $aq$, $aq^2$ os números.

$a + aq + aq^2 = 19$

$a^2 + (aq)^2 + (aq^2)^2 = 133$

Daí, $a(1 + q + q^2) = 19$

$a^2(1 + q^2 + q^4) = 133$

Dividindo, $a(1 - q + q^2) = \frac{133}{19} = 7$

Daí, $\frac{1+q+q^2}{1-q+q^2} = \frac{19}{7}$

$q = \frac{3}{2}$ ou $q = \frac{2}{3}$.

Se $q = \frac{3}{2}$, substituindo vem $a = 4$; se $q = \frac{2}{3}$, substituindo vem $a = 9$. Os números são 4, 6, 9 ou 9, 6, 4.

14. Sejam $x - r$, $x$, $x + r$ a progressão aritmética e $x - r + 1$, $x$, $x + r$ a progressão geométrica.

$$\begin{cases} x - r + 1 + x + x + x + r = 19 \\ \frac{x}{x-r+1} = \frac{x+r}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 6 \\ 36 = (6 + r).(7 - r) \end{cases}$$

$r = 3$ ou $r = -2$

Os números são 4, 6, 9 ou 9, 6, 4.

15. Sejam $x - 6$, $x$, $x + 6$, $x - 6$ os números.

$\frac{x+6}{x} = \frac{x-6}{x+6}$

$x^2 + 12x + 36 = x^2 - 6x$

$x = -2$

Os números são $-8, -2, 4, -8$.

16. Se $2^p - 1$ é primo, os divisores de $2^{p-1}(2^p - 1)$ são $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{p-1}, (2^p - 1), 2(2^p - 1), 2^2(2^p - 1), \ldots 2^{p-1}(2^p - 1)$.

A soma desses divisores é $2^{p-1}(2^p - 1)$ são $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{p-1} + (2^p - 1).(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{p-1}) = 2p.(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{p-1}) = 2p.(2^p - 1) = 2.2^{p-1}(2^p - 1)$.

17. A $k$-ésima parcela da soma vale $1 + 10 + \cdots 10^{k-1} = \dfrac{10^k - 1}{9}$. A soma é igual a

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{10^k - 1}{9} = \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n} 10^k - \frac{n}{9} = \frac{10}{9}.\frac{10^n - 1}{9} - \frac{n}{9} = \frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{81}.$$

18.

$$\begin{aligned}
&444\ldots488\ldots89 = 9 + \underbrace{8.10 + 8.10^2 + \cdots 8.10^{n-1}}\\
&= \underbrace{4.10^n + 4.10^{m+1} + \cdots + 4.10^{2n-1}}\\
&= 9 + 80\frac{10^{n-1} - 1}{9} + 4.10^n\frac{10^n - 1}{9} = \frac{4.10^2n + 4.10^n + 1}{9}\\
&= \left(\frac{2.10^n + 1}{3}\right)^2
\end{aligned}$$

A raiz é $\dfrac{2.10^n + 1}{3} = 66\ldots67$ ($n$ dígitos).

19. Em cada operação o número de folhas dobra. O número de folhas da pilha depois de 33 dessas operações é $2^{32} = 2^2.(2^10)^3$@$4.10^9$.

A altura da pilha vale, aproximadamente, 4,109.0,1mm=400km

A resposta é $D$.

20. Em cada operação a quantidade de vinho reduz-se em $\frac{1}{p}$. Os valores da quantidade de vinho formam uma progressão geométrica de razão $1 - \frac{1}{p}$.

A resposta é $\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)^n$.

21. a) $12600 = 2^3.3^2.5^2.7$

Os divisores positivos de 121,600 são os números da forma $2^\alpha.3^\beta.5^\gamma.7^\delta$ com $\alpha \in \{0,1,2,3\}$, $\beta \in \{0,1,2\}$, $\gamma \in \{0,1,2\}$ e $\delta \in \{0,1\}$.

A soma dos divisores é

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} 2^{\alpha}.3^{\beta}.5^{\gamma}.7^{\delta} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} 2^{\alpha}.3^{\beta}.5^{\gamma}.7^{0} + \sum_{\alpha,\beta,\gamma} 2^{\alpha}.3^{\beta}.5^{\gamma}.7^{1}$$
$$= (1+7)\sum_{\alpha,\beta,\gamma} 2^{\alpha}.3^{\beta}.5^{7} = 8\sum_{\alpha,\beta} 2^{\alpha}.3^{\beta}.5^{0} + 8\sum_{\alpha,\beta} 2^{\alpha}.3^{\beta}.5^{1}$$
$$+ 8\sum_{\alpha,\beta} 2^{\alpha}.3^{\beta}.5^{2} = 8(1+5+25)\sum_{\alpha,\beta} 2^{\alpha}.3^{\beta} = 248\sum_{\alpha} 2^{\alpha}.3^{0}$$
$$+ 248\sum_{\alpha} 2^{\alpha}.3^{1} + 248\sum_{\alpha} 2^{\alpha}.3^{2} = 248(1+3+9)\sum_{\alpha} 2^{\alpha}$$
$$= 3224(1+2+4+8) = 48360$$

b) Os divisores ímpares positivos de 12600 são os números da forma $3^{\beta}.5^{\gamma}.7^{\delta}$ com $\beta \in \{0,1,2\}$, $\gamma \in \{0,1,2\}$ e $\delta \in \{0,1\}$

A soma desses divisores é

$$\sum_{\beta,\gamma,\delta} 3^{\beta}.5^{\gamma}.7^{\delta} = \sum_{\beta,\gamma} 3^{\beta}.5^{\gamma}.7^{0} + \sum_{\beta,\gamma} 3^{\beta}.5^{\gamma}.7^{1}$$
$$= (1+7)\sum_{\beta,\gamma} 3^{\beta}.5^{\gamma} = 8\sum_{\beta} 3^{\beta}.5^{0} + 8\sum_{\beta} 3^{\beta}.5^{1} + 8\sum_{\beta} 3^{\beta}.5^{2}$$
$$= 8(1+5+25)\sum_{\beta} 3^{\beta} = 248(1+3+9) = 3224$$

22. a) $0,141414\cdots = 0,14 + 0,0014 + 0,000014 + \cdots = \dfrac{0,14}{1-0,01} = \dfrac{0,14}{0,99} = \dfrac{14}{99}.$

b) $0,3454545\cdots = 0,3 + 0,045 + 0,00045 + 0,0000045 + \cdots = 0,3 + \dfrac{0,045}{1-0,001} = 0,3 + \dfrac{0,045}{0,99} = \dfrac{3}{10} + \dfrac{45}{990} = \dfrac{10}{55}.$

c) $0,9999999\cdots = 0,9 + 0,09 + 0,009 + \cdots \dfrac{0,9}{1-0,1} = 1$

d) $1,71111\cdots = 1,7 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 + \cdots = 1,7 + \dfrac{0,01}{1-0,1} = 1,7 + \dfrac{0,01}{0,9} = \dfrac{17}{10} + \dfrac{1}{90} = \dfrac{77}{45}.$

23. a) $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \cdots = +\frac{2}{1-\frac{1}{3}} = 3$

b) São duas progressões geométricas de razão $\frac{1}{7^2}$. Uma tem primeiro termo $\frac{1}{7}$ e a outra, $\frac{2}{7^2}$. A soma vale $\dfrac{\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7^2}} + \dfrac{\frac{2}{7^2}}{1-\frac{1}{7^2}} = \dfrac{3}{16}$.

c) $S = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \cdots$

$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{2}{8} + \frac{2}{16} + \cdots = \frac{1}{2} = \frac{\frac{2}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$ e $S = 34$.

d) $S = 1 + 2x + 3x^3 + 4x^3 + \cdots,\ -1 < x < 1$

$xS = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots$

Subtraindo, $S(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \dfrac{1}{1-x}$

$$S = \frac{1}{(1-x)^2}$$

e) Grupando de três em três, obtemos $\frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{256} + \cdots = \dfrac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{8}} = \dfrac{2}{7}$

24. a) $5 + 2.\frac{4}{9}.5 + 2\left(\frac{4}{9}\right).5 + \cdots 5 + \frac{2.\frac{4}{9}.5}{1-\frac{4}{9}} = 13$ metros.

b) O tempo que a bola gasta para, partindo de repouso, cair de uma altura $h$ é $\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$. Como as alturas (em metros) das quedas são 5, $\frac{4}{9}.5\left(\frac{4}{9}\right)^2.5, \ldots$, supondo $g = 10n/s^2$, os tempos de queda (em segundos) serão 1, $\frac{1}{3}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^2, \ldots$

O tempo total de queda é $1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots = \dfrac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$ segundos.

A este tempo devemos adicional o tempo gasto pela bola nas subidas, que é o mesmo, à exceção do 1s da queda inicial.

A resposta é 5s, aproximadamente.

25. a) Os lados da poligonal são hipotenusas de triângulos semelhantes na razão (cada um para o anterior) $\frac{b}{a}$.

O comprimento é $a + b + \frac{b^2}{a} + \cdots = \dfrac{1}{1-\frac{b}{a}} = \dfrac{a^2}{a-b}$.

b) É o termo de ordem $n$ de uma progressão geométrica de primeiro termo $a$ e razão $\frac{b}{a}$. A resposta é $a\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}$

26. a) $\pi.1 + \pi\frac{1}{2} + \pi\frac{1}{4} + \cdots = \dfrac{\pi}{1-\frac{1}{2}} = 2\pi$.

b) $2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \cdots = \dfrac{2}{1-\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}$.

27. Uma semelhança de triângulos fornece $\frac{r_n - r_{n+1}}{r_n + r_{n+1}} = \frac{1-r}{1+r}$. Daí $r_{n+1} = r.r_n$. Os raios formam uma progressão geométrica de primeiro termo 1 e razão $r$. A soma vale $\frac{1-r^n}{1-r}$.

28. $\lim a_n = 300+0,3.200+0,3^2.300+0,3^3.200+\cdots = \frac{300}{1-0,3^2}+\frac{0,3.200}{1-0,3^2} = 396$

$\lim b_n = 200+0,3.300+0,3^2.200+0,3^3.300+\cdots = \frac{200}{1-0,3^2}+\frac{0,3.300}{1-0,3^2} = 319.$

29. $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$ é crescente e tem limite $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

1 é verdadeiro; 2, 3 e 4 são falsos; 5 é verdadeiro (basta fazer $n = 3$).

30. $S = \frac{1}{9} + \frac{3}{9^2} + \frac{5}{9^3} + \frac{7}{9^4} + \cdots$

$\frac{1}{9}S = \frac{1}{9^2} + \frac{3}{9^3} + \frac{5}{9^4} + \cdots$

Subtraindo,

$\frac{8}{9}S = \frac{1}{9} + \frac{2}{9^2} + \frac{2}{9^3} + \frac{2}{9^4} + \cdots = \frac{1}{9} + \frac{\frac{2}{9^2}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{5}{36}$

$S = \frac{5}{32}$

31. a) $x^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{4}}.x^{\frac{1}{8}}\cdots = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots} = x^{\frac{1}{2}}1-\frac{1}{2} = x$

b) $x^{1/2}.y^{1/2}.x^{1/8}.y^{1/16}\cdots = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\cdots}.y^{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots} = x^{2/3}.y^{1/3} = \sqrt{x^2y}.$

32. a) Em cada operação a soma dos comprimentos restantes 2/3 da anterior. A resposta é $\left(\frac{2}{3}\right)^n$

b) $\lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

c) Não, o conjunto é infinito.

33. $b_{n+1} - b_n = \log a_{n+1} - \log a_n = \log \frac{a_{n+1}}{a_n} = \log q =$ constante.

34. $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{e^{a_{n+1}}}{e^{a_n}} = e^{a_{n+1}-a_n}e^r =$ constante.

35. $A_n = A_0.q^n$

$\frac{A_0}{2} = A_0 - q^{1600}$

$q = 2^{-1/1600}$

A massa se reduzirá a 2/3 se $\dfrac{2A_0}{3} = A_0.q^n$

$n = \dfrac{\log(2/3)}{\log q} \cong 936$

36. $a = 1 + 10 + \cdots + 10^{n-1} = \dfrac{10^n \quad 1}{9}$

$b =^+ 10^n$

$ab + 1 = \frac{10^{2n}+4.10^n+4}{9} = \left(\dfrac{10^n+2}{3}\right)^2$

A raiz quadrada é $\dfrac{10^n+2}{3} = 333\ldots34$ ($n$ dígitos)

37. $A^2 = 5A$

$A^n - 5^{n-1}A = \begin{bmatrix} 5^{n-1} & 2.5^{n-1} \\ 2.5^{n-1} & 4.5^{n-1} \end{bmatrix}$

38. a) O perímetro aumenta de/3 em cada estágio. Logo, os perímetros formam uma progressão geométrica de razão 4/3. O perímetro do estágio de ordem $n$ é $3.\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

b) $A_{n+1} = A_n + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{3}{9}\right)^n$
Somando, $A_n = \frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{20}\left(\frac{3}{9}\right)^n$.

c) $\infty$, pois a razão da progressão é maior que 1.

d) $\lim \left[\dfrac{2\sqrt{3}}{5} - \dfrac{3\sqrt{3}}{20}\left(\dfrac{3}{9}\right)^n\right] = \dfrac{2\sqrt{3}}{5}$.

39. a) A razão da progressão é dada por 880 $= 440q^{12}$. Daí, $q = 2^{1/12}$.
A freqüência desse dó é $440q^3 = 523$ Hz, aproximadamente.

b) $440/q^2 = 392$ Hz, aproximadamente.

c) $186 = 440q^n$
$n \cong -15$
A nota é Fá#.

40. b) $L = 120 + 10\log[10]I$
$L' = 120 + 10\log[10](2I)$
$L' - L = 10\log[10]2 \cong 3$.
A resposta é 3 dB.

41. a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0 - 0 - \sum_{k=1}^{\infty} \Delta \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} k = \Delta(k-1)^2 =$
$-\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)\Delta \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} = 0-2+\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \Delta(2k-3) = -2+\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} .2 =$
$-2+8=6$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} l; 2^k = \sum_{k=1}^{\infty} k.\Delta 2^k = n.2^{n+1} - 0 - \sum_{k-1}^{\infty} 2^k.1 = n.2^{n+1} - (2^{n+1} - 2) =$
$(n-1)2^{n-1} + 2.$

# CAPÍTULO 2

## Matemática Financeira

### 2.1 Exercícios

1. Investindo R$ 450,00 você retira, após de 3 meses, R$ 600,00. A taxa mensal de juros rendeu seu investimento?

2. Determine as taxas mensais equivalentes a 100% ao ano e a 39% ao trimestre.

3. Determine as taxas anuais equivalentes a 6% ao mês e a 12% ao trimestre.

4. Determine as taxas efetivas anuais equivalentes a:

   a) 30% ao ano, com capitalização mensal.

   b) 30% ao ano, com capitalização trimestral.

   c) $i$ ao ano, capitalizados $k$ vezes ao ano.

5. Qual o limite, quando $k$ tende para infinito, da resposta ao ítem c) do problema anterior? Neste caso diz-se que os juros estão sendo capitalizados continuamente e $i$ é chamado de taxa instantâneas de juros.

6. Use a resposta do problema anterior para dar uma definição financeira do número $e$.

7. Determine:

   a) a taxa efetiva trimestral equivalente a 12% ao trimestre com capitalização continua.

   b) a taxa instantânea anual equivalente à taxa efetiva anual de 60%.

   c) a taxa instantânea semestral equivalente à taxa efetiva anual de 60%.

8. A Mesbla, em vários natais, ofereceu a seus clientes duas alternativas de pagamento:

   a) pagamento de uma só vez, um mês após a compra.

   b) pagamento em três prestações mensais iguais, vencendo a primeira no ato da compra.

   Se você fosse cliente da Mesbla, qual seria a sua opção?

9. O Foto Studio Sonora convidou, em dezembro de 1992, os seus clientes a liquidarem suas prestações mensais vincendas, oferecendo-lhes em troca um desconto. O desconto seria dado aos que pagassem, de uma só vez, todas as prestações a vencer em mais de 30 dias, e seria de 30%, 40% ou 50%, conforme fossem pagas uma, duas ou três prestações. Supondo que o dinheiro valia 27% ao mês, a oferta era vantajosa?

10. Lúcia comprou um exaustor, pagando R$ 180,00, um mês após a compra e R$ 200,00, dois meses após a compra. Se os juros são de 25% sobre o saldo devedor, qual é o preço à vista?

11. Uma geladeira custa R$1000,00 à vista e pode ser paga em três prestações mensais iguais. Se são cobrados juros de 6% ao mês sobre o saldo devedor, determine o valor da prestação, supondo que a primeira prestação é paga:

    a) no ato da compra;

    b) um mês após a compra;

    c) dois meses após a compra.

12. Ângela tomou um empréstimo de R$ 400,00, por dez meses. Os juros foram de 3% ao mês durante os quatro primeiros meses, de 5% ao mês durante os cinco meses seguintes e de 9% ao mês no último mês. Calcule:

    a) a taxa média de juros.

b) o montante pago.

13. Leigh investiu 30% de seu capital a juros de 10% ao mês e os 70% restantes a 18% ao mês. Qual e a taxa média de juros obtida?

14. Laura quer comprar um violão em uma loja que oferece um desconto de 30% nas compras à vista ou pagamento em três prestações mensais, sem juros e sem desconto. Determine a taxa mensal de juros embutida nas vendas a prazo, supondo o primeiro pagamento:

    a) no ato da compra
    b) um mês após a compra.
    c) dois meses após a compra.

15. Regina tem duas opções de pagamento:

    a) à vista, com $x$% de desconto.
    b) em duas prestações mensais iguais, sem juros, vencendo a primeira um mês após a compra.

    Se o dinheiro vale 5% ao mês, para que valores de $x$ ela preferirá a segunda alternativa?

16. Um banco efetua descontos à taxa de 6% ao mês. Qual a taxa mensal de juro cobrada pelo banco nas operações:

    a) de um mês?
    b) de dois meses?
    c) de três meses?

17. Um banco efetua desconto à taxa de 6% ao mês, mas exige que 20% do valor efetivamente liberado sejam aplicados no próprio banco, a juros de 2% ao mês. Essa é a chamada reciprocidade. Qual a taxa mensal de juros papa pelos tomadores de empréstimos por dois meses?

18. No cálculo de juros, considera-se sempre o ano comercial de 360 dias, ou seja, com 12 meses de 30 dias. Essa é a chamada "regra dos banqueiros". Os juros assim calculados são chamados de ordinários, ao passo que os juros calculados com o ano de 365 (ou 366) dias são chamados de exatos e não são usados em lugar nenhum.

a) Mostre que, dados o principal e a taxa anual, os juros ordinários produzidos em $t$ dias são maiores que os exatos.

b) Para um principal de R$ 1000,00 e juros de 12% ao ano, determine os juros simples, ordinários e exatos, produzidos em 16 dias.

c) Refaça o ítem b) para juros compostos.

19. Uma conta de R$ 700,00 vencia no dia 25 de outubro de 1996 e foi paga em 5 de novembro de 1996. Quais os juros pagos, se os juros de mora são de 12% ao mês?

20. Determine o melhor e a pior alternativa para tomar um empréstimo por três meses:

    a) juros simples de 16% ao mês.

    b) juros compostos de 15% ao mês. desconto bancário com taxa de desconto de 12% ao mês.

21. Henrique vai emprestar dinheiro a Mário, por quantos meses e pretende receber juros compostos de 12% ao mês. Como Mário só pretende pagar juros simples, qual a taxa mensal de juros simples que Henrique deve cobrar?

22. Quanto uma operação é pactuada por um número inteiro de períodos de tempo, há três medos de calcular os juros relativos a frações de períodos:

    a) Só são pagos juros nos períodos inteiros de tempo.

    b) São pagos juros compostos durante todo o período. Essa é a chamada convenção exponencial;

    c) São pagos juros compostos nos períodos inteiros e juros simples nas frações de períodos de tempo. Essa é a chamada convenção linear.

    Evidentemente o processo a) se aplica quando os bancos pagam e, o processo c), quando recebem.

    Em 5 de janeiro de 1996 foi feito um investimento de 300 reais, a juros de 15% ao mês. Determine, pelos três processos, o montante em 12 de abril de 1996.

23. Um televisor, cujo preço à vista é R$ 400,00, é vendido em dez prestações mensais iguais. Se são pagos juros de 6% ao mês sobre o saldo devedor, determine o valor das prestações, supondo a primeira prestação paga:

a) no ato da compra.

b) um mês após a compra.

c) dois meses após a compra.

24. Se a taxa corrente de juros é de $0,6\%$ ao mês, por quanto se aluga um imóvel cujo preço à vista é R$ 50000,00, supondo:

    a) o aluguel mensal pago vencido?

    b) o aluguel mensal pago adiantadamente?

25. Supondo juros de 0,5% ao mês, quanto você deve investir mensalmente, durante 30 anos, para obter, ao fim desse prazo, por 30 anos, uma renda mensal de R$ 100,00?

26. Supondo juros de 0,5% ao mês, quanto você deve investir mensalmente, durante 35 anos, para obter, ao fim desse prazo, uma renda perpétua de R$ 100,00?

27. Faça as planilhas de amortização de uma dívida de R$ 3000,00, em 8 pagamentos mensais, com juros de 10% ao mês:

    a) pela tabela Price.

    b) pelo SAC.

28. Considere a amortização de uma dívida de R$ 35000,00, em 180 meses, com juros de 1% ao mês, pelo sistema francês. Determine:

    a) o valor da centésima prestação.

    b) o estado da dívida nessa época.

29. Refaça o problema anterior pelo SAC.

30. Considere a amortização de um dívida em 150 meses, com juros de 1% ao mês, pelo sistema francês.

    a) De quanto se reduzirá a prestação, dobrando-se o prazo?

    b) Que fração de dívida já terá sido amortizada na época do 75º pagamento?

31. Considere a amortização de uma dívida de 150 meses, com juros de 1% ao mês, pelo SAC.

a) De quanto se reduzirá inicial, dobrando-se o prazo?

b) Que fração da dívida já terá sido amortizada na época do 75º pagamento?

32. Uma lanterna de Gol, original, custa R$ 280,00 e tem vida útil de 5 anos. Uma lanterna alternativa custa R$ 70,00 e tem vida útil de 1 ano. Gilmar precisa trocar a lanterna de seu Gol. Considerando que o dinheiro vale 12% ao ano, que lanterna deve preferir?

33. Um equipamento pode ser alugado por R$ 75,00 mensais ou comprado por R% 2000,00. A vida útil do equipamento é de 30 meses e o valor residual ao fim desse período é de R$ 300,00. Se o equipamento for comprado, há um custo mensal de R$ 5,00 de manutenção. Considerando o valor do dinheiro de 1% ao mês, qual deve ser a decisão: Comprar ou alugar?

34. As cadernetas de poupança renderam 1416% em um ano cuja inflação foi de 1109%. Qual a estabilidade real?

## 2.2 Soluções

1. $600 = 450(1+i)^3$

   $i = \left(\frac{600}{450}\right)^{1/3} - 1 = 10,06\%$

2. a) $1 + I = (1+i)^{12}$

   $1 + 1 = (1+i)^{12}$

   $i = 2^{1/12} - 1 = 5,95\%$

   b) $1 + I = (1+i)^3$

   $1 + 0,39 = (1+i)^3$

   $i = 1,39^{1/3} - 1 = 11,60\%$

3. a) $1 + I = (1+i)^{12}$

   $I = 1,06^{12} - 1 = 101,22\%$

   b) $1 + I = (1+i)^4$

   $I = 1,12^4 - 1 = 57,37\%$

4. a) A taxa é d30%/12 = 2,5% ao mês.

   $1 + I = (1+i)^{12}$

   $I = 1,025^{12} - 1 = 34,49\%$

b) A taxa é de $30\%/4 = 7,5\%$ ao trimestre.
$1 + I = (1 + i)^4$
$I = 1,075^4 - 1 = 33,55\%$.

c) A taxa relativa ao período de capitalização é $i/k$.
$1 + I = (1 + \frac{i}{k})^k$
$I = (1 + \frac{i}{k})^k - 1$

5. $\lim(1 + \frac{i}{k})^k - 1 = e^i - 1$

6. O número $e$ é o valor de montante gerado em um ano por um principal igual a 1, a juros de 100% ao ano, capitalizados continuamente.

7. a) $e^\delta \quad 1 = e^{0,12} - 1 = 12,75\%$
   b) $\ln(1 + i) = \ln 1,6 = 47,00\%$
   c) -, Aproveitando o ítem anterior, $47,00\%/2 = 23,50\%$.

8. Seja 0 a data de compra. Seja 3 o preço do artigo. Usemos a data 1 como data focal.

   Na alternativa a), paga-se $A = 3$.

   Na alternativa b), paga-se $B = \frac{1}{1+i} + 1 + (1 + i)$

   $B - A = \frac{i^2}{1+i} > 0$

   Logo, como $B > A$, a alternativa a) é preferível.

9. a) Supondo uma prestação vincenda de 100 e tomando a data atual como focal:

   aceitando: pago, na data 0, 70.

   não aceitando: pago, na data 1, 100, o que equivale a pagar, na data 0,
   $\frac{100}{1+0,27} = 78,74$
   A proposta é vantajosa.

   b) Supondo duas prestações vincendas de 100 cada uma e tomando a data atual como focal:

   aceitando: pago, na data 0, 120.

   não aceitando: pago, na data 1, 100, e na data 2, 100, o que equivale a pagar na data 0,
   $\frac{100}{1+0,27} + \frac{100}{(1+0,27)^2} = 140,74$
   A proposta é vantajosa.

c) Supondo três prestações vincendas de 100 cada uma e tomando a data atual como focal:

aceitando: pago, na data 0, 150.

não aceitando: pago, na data 1, 100, na data 2, 100, e, na data 3, 100, o que equivale a pagar, na data 0,

$\frac{100}{1+0.27} + \frac{100}{(1+0.27)^2} + \frac{100}{(1+0.27)^3} = 189,56$

A proposta é vantajosa

10. $\frac{180}{1+0.25} + \frac{200}{(1+0.25)^2} = 272$

O preço à vista é R$ 272,00.

11. a) Tomando a data focal um mês antes da compra,

$\frac{P}{1,06} = 1000\frac{1-1,06^{-3}}{0,06}$

$P = 352,93$

b) Tomando a data focal no ato da compra,

$P = 1000\frac{1-1,06^{-3}}{0,06}$

$P = 374,11$

c) Tomando a data focal um mês depois da compra,

$P.1,06 = 1000\frac{1-1,06^{-3}}{0,06}$

$P = 396,56$

12. O montante pago foi $400.1,03^4.1,05^5.1,09 = 626,30$.

A taxa média de juros é calculada por $626,30 = 400.(1+i)^{10}$, $i = 4,59\%$ ao mês.

13. O montante é $0,31.1,1^t + 0,7.1,18^t$

A taxa média de juros é calculada por $0,3.1,1^t + 0,1.1,18^t = 1.(1+i)^t$ $i = (0,3.1,1^t + 0,1.1,18^t)^{1/t} - 1$, onde $t$ é o número de meses do investimento. Se $t = 1$, a taxa é 15,60%; se $t = 2$, é 15,66%; se $t \to \infty$, a taxa é 18%.

14. a) Usando a data da compra como data focal e considerando um preço igual a 30,

$21 = 10 + \frac{10}{1+i} + \frac{10}{(1+i)^2}$

Resolvendo, $i = 51,08\%$.

b) Tomando para data focal a data da compra e considerado um preço igual a 30,

$21 = \frac{10}{1+i} + \frac{10}{(1+i)^2} + \frac{10}{(1+i)^3}$

Resolvendo, $i = 20,20\%$

c) Tomando para data focal a data da compra e considerado um preço igual a 30,

$21 = \frac{10}{(1+i)^2} + \frac{10}{(1+i)^3} + \frac{10}{(1+i)^4}$

Resolvendo, $i = 12,81\%$.

15. Arbitrando o preço em 100 e usando a data da compra como data focal,

$100 - x > \frac{50}{1,05} + \frac{50}{1,05^2}$

$x < 7,03\%$

16. a) $100 = 94(1+i)$

$i = 6,38\%$

b) $100 = 88(1+i)^2$

$i = 6,60\%$

c) $100 = 72(1+i)^3$

$i = 6,84\%$

17. Sem reciprocidade, receberia 88 para pagar 100 em dois meses. Com reciprocidade, recebe $0,8.88 = 70,4$ para pagar $100 - 17,6.1,02^2 = 81,69$.

$81,69 = 70,4.(1+i)^2$

$i = 7,72\%$

18. a) $i/356 < i?360$

b) $1000.0,12.16/360 = 5,33$

$1000.0,12.16/365 = 5,26$

c) O montante é $1000.(1+0,12)^{16/360} = 1005,05$ e os juros são de R$ 5,05;
O montante é $1000.(1+0,12)^{16/365} = 1004,98$ e os juros são de R$ 4,98.

19. $700.0,12.11/30 = 30,80$.

20. a) 48% ao trimestre.

b) $I = 1,15^3 - 1 = 52,09\%$ ao trimestre.

c) $100 = 64.(1+I)$; $I = 56,25\%$ ao trimestre.

A melhor é a) e a pior é c).

21. $1,12^4 - 1 = 57,35\%$ são os juros quadrimestrais. Deve cobrar $57,35\%/4 = 14,33\%$ ao mês.

22. a) $300.1,15^3 = 456,26$

b) $300.1,15^{3+\frac{8}{30}} = 437,59$

c) $456,26 + 456,26.0,15.8/30 = 474,51$

23. a) $\frac{400}{1,06} = P\frac{1-1,06^{-10}}{0,06}$
$P = 51,27$

b) $400 = P\frac{1-1,06^{-10}}{0,06}$
$P = 54,35$

c) $400.1,06 = P\frac{1-1,06^{-10}}{0,06}$
$P = 57,61$

24. a) $P = Ai = 50000.0,006 = 300,00$

b) $\frac{A}{1+i} = \frac{P}{c}$
$P = \frac{50000}{1,006}.0,006 = 298,21$

25. O montante que você deve acumular é $100 = \frac{1-1,005^{-360}}{0,005} = 16.679,16$

Para isso, $P\frac{1-1,005^{-360}}{0,005}.1,005^{360} = 16.779,16$ e $P = 16,60$

26. O montante que você deve acumular é $\frac{100}{0,005} = 20.000$

Para isso, $P\frac{1-1,005^{-420}}{0,005}.005^{420} = 20.000$ e $P = 14,04$

27. A prestação pela tabela Price é $P = 3.000\frac{0,1}{1-1,1^{-8}} = 562,33$

A amortização pelo SAC é $3.000/8 = 375$

TABELA PRICE

| ÉPOCA | PRESTAÇÃO | JUROS | AMORTIZAÇÃO | ESTADO DA DÍVIDA |
|---|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - | 3 000,00 |
| 1 | 562,33 | 300,00 | 262,33 | 2737,67 |
| 2 | 562,33 | 273,77 | 288,56 | 2.449,11 |
| 3 | 562,33 | 244,91 | 317,42 | 2.131,69 |
| 4 | 562,33 | 213,17 | 349,16 | 1.782,53 |
| 5 | 562,33 | 178,25 | 384,08 | 1.398,45 |
| 6 | 562,33 | 139,84 | 422,49 | 975,96 |
| 7 | 562,33 | 97,60 | 464,73 | 511,23 |
| 8 | 562,33 | 51,12 | 511,23 | - |

SAC

| ÉPOCA | PRESTAÇÃO | JUROS | AMORTIZAÇÃO | ESTADO DA DÍVIDA |
|---|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - | 3 000,00 |
| 1 | 675,00 | 300,00 | 375,00 | 2.625,00 |
| 2 | 637,50 | 262,50 | 375,00 | 2.250,00 |
| 3 | 600,00 | 225,00 | 375,00 | 1.875,00 |
| 4 | 562,50 | 187,50 | 375,00 | 1.500,00 |
| 5 | 525,00 | 150.00 | 375,00 | 1,125,00 |
| 6 | 487,50 | 112,50 | 375,00 | 750,00 |
| 7 | 450,00 | 75,00 | 375,00 | 375,00 |
| 8 | 412,00 | 37,50 | 375,00 | - |

28. a) A prestação $35.000\frac{0,01}{1-1,01^{-180}} = 420,06$

b) $420,06\frac{1-1,01^{-180}}{0,01} = 23.056,28$

29. a) A amortização $35.000/180 = 194,44$

A dívida na época da 99ª prestação é $81.194,44 = 15750$.

Os juros da centésima prestação são 157,50 e a centésima prestação é igual a 194,44+157,50=351,94

b) O estado da dívida é $80.194,44 = 15.555,56$

30. a) Supondo a dívida igual a 100, a prestação para 150 meses é

$P_{150} = 100\frac{0,01}{1-1,01^{-150}} = 1,29$ e a prestação para 300 meses é

$P_{300} = 100\frac{0.01}{1-1,01^{-300}} = 1,05$

A redução é de $0,24/1,29 = 18\%$, aproximadamente

31. a) A dívida igual a 300, a prestação para 150 meses é

$P_{150} = \frac{300}{150} + 3 = 5$

A prestação para 300 meses é $P_{300} = \frac{300}{300} + 3 = 4$

A redução é de 20%.

b) 50%.

32. A original custa, por ano, $280\frac{0,12}{1,12(1-1,12^{-5})} = 69,35$.

Como a alternativa implica em um custo anual de 70,00, é melhor comprar a original.

33. O custo de compara é $2.000 - \frac{300}{1,01^{30}} = 1.777,42$

Isso equivale a um custo mensal $1.777,42\frac{0,01}{1-1,01^{-30}} = 68,87$ mais a manutenção, dando um custo mensal total de 73,87.

É melhor comprar.

34. .

| | | |
|---|---|---|
| dinheiro | 100 | 1516 |
| preço | 1 | 12,09 |
| Poder de compra | 100 | $1516/12,09 \simeq 125$ |

A rentabilidade real foi de 25%.

# CAPÍTULO 3

## Recorrência

### 3.1 Exercícios

**Seção 3.1**

1. Para uma seqüencia definida por $x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n$, $x_0 = x_1 = 1$, determine $x_5$.

2. Seja $x_n$ o número máximo de regiões em que $n$ retas podem dividir o plano. Caracterize $x_n$ recursivamente.

3. Prove que uma recorrência de primeira ordem, $x_{n+1} = f(x_n)$, com uma condição inicial $x_1 = a$, tem sempre uma e só uma solução.

4. Prove que uma recorrência de segunda ordem $x_{n+2} = f(x_{n+1}, x_n)$, com condições iniciais $x_1 = a$ e $x_2 = b$, tem sempre solução única.

5. Se $x_{n+1} = 2x_n$ e $x_1 = 3$, determine $x_n$.

6. Se $x_{n+1} = x_n + 3$ e $x_1 = 2$, determine $x_n$.

7. Seja $x_n$ o número máximo de regiões em que $n$ círculos podem dividir o plano. Caracterize $x_n$ recursivamente.

8. Determine o número de permutações caóticas de 5 elementos.

9. Prove o número de permutações caóticas de $n$ elementos é $D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{k!}$.

## Seção 3.2

1. Determine o número máximo de regiões em que $n$ retas podem dividir o plano. (Veja o Exemplo 2 da seção de recorrência).

2. Quantos são as seqüencias de $n$ termos, todos pertencentes a $\{0, 1\}$, que possuem em número ímpar de termos iguais a 0?

3. Quantas são as seqüencias de $n$ termos, todos pertencentes a $\{0, 1, 2\}$, que possuem um número ímpar de termos iguais a 0?

4. (A Torre de Hanói). Diz a lenda que havia em um tempo 3 escadas e $n$ discos de ouro, de diâmetros diferentes. Inicialmente os discos estavam enfiados na primeira escada, em ordem crescente de diâmetros, de cima para baixo. Ocupavam-se os sacerdotes em transferi-los para a terceira escada usando a segunda como escada auxiliar. No processo de transferência, de cada vez se movia apenas um disco, de uma escada para outra, e jamais um disco poderia ser colocado sobre um disco menor. Quando todos estivessem enfiados na terceira escada, o mundo acabaria. Quantas transferências de discos, de uma escada para outra, devem ser feitas para colocá-los na terceira escada?

5. Sheila e Helena disputam uma série de partidas. Cada partida é iniciada por quem venceu a partida anterior. Em cada partida, quem a iniciou tem probabilidade 0,6 de ganhá-la e probabilidade 0,4 de perdê-la. Se Helena iniciou a primeira partida, qual é a probabilidade de Sheila ganhar a $n$-ésima partida?

6. Determine o número máximo de regiões em que $n$ círculos podem dividir o plano. (Veja o Exemplo 7 da seção 3.1).

7. Resolva a equação $x_{n+1} = (n+1)x_n + n$, $x_1 = 1$.

8. Resolva a equação $(n+1)x_{n+1} + nx_n = 2n - 3$, $x_1 = 1$.

9. Resolva a equação $x_{n+1} - nx_n = (n+1)!$, $x_1 = 1$.

10. Um círculo foi dividido em $n$ ($n \geq 2$) setores. De quantos modos podemos colori-los, cada setor com uma só cor, se dispomos de $k$ ($k > 2$) cores diferentes e setores adjacentes não devem ter a mesma cor?

11. A torcida do Fluminense tem hoje $p_0$ membros. A taxa anual de natalidade é $i$, a de mortalidade é $j$ e além disso, todo ano um número fixo de $R$ torcedores desiste de vez. Se $i > j$, determine o número de torcedores daqui a $n$ anos. A torcida está condicionada à extinção?

## Seção 3.3

1. Resolva as equações a seguir:

   a) $x_{n+2} + 5x_{n+1} + 6x_n = 0$.
   b) $x_{n+2} + 6x_{n+1} + 9x_n = 0$.
   c) $x_{n+2} + 2x_{n+1} + 2x_n = 0$.
   d) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = n$.
   e) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 1 + 3 \cdot 4^n$.
   f) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 2^n$.
   g) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = n + 3^n$.
   h) $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = n - 3^n$.
   i) $x_{n+2} + x_n = 1$.
   j) $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 1 + n3^n$.

2. a) $x_{n+2} + 5x_{n+1} + 6x_n = 0$; $x_0 = 3$; $x_1 = \quad 6$.
   b) $x_{n+2} + x_{n+1} - 6x_n = 6 \quad 8n$; $x_0 = 1$; $x_1 = 4$.
   c) $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 2^{n+3}$; $x_0 = 3$; $x_1 = 6$.

3. Quantas são as seqüencias de $n$ termos, todos pertencentes a $\{0, 1, 2\}$, que não possuem dois termos consecutivos iguais a 0?

4. Determine o número de modos de cobrir um tabuleiro $2 \times n$ com dominós $2 \times 1$ iguais.

5. Um casal de coelhos adultos gera mensalmente um casal de coelhos, que se tornam adultos dois meses após o nascimento. Suponha os coelhos imortais. Começando no mês 0 com um casal adulto (que terá prole apenas no mês 1), quantos casais serão gerados no mês $n$?

6. Uma planta é tal que cada uma de suas sementes produz, um ano após ter sido plantada, 21 novas sementes e, a partir daí, 44 novas sementes a cada ano. Se plantamos hoje uma semente e se, toda vez que uma semente for produzida ela for imediatamente plantada, quantas sementes serão produzidas daqui a $n$ anos?

7. O salário de Carmelino no mês $n$ é $S_n = a + b_n$, Sua renda mensal é formada pelo salário e pelos juros de suas aplicações financeiras. Ele poupa anualmente $1/p$ de sua renda e investe sua poupança a juros mensais de taxa $i$. Determine a renda de Carmelino no mês $n$.

8. Cinco times de igual força disputarão todo um ano um torneio. Uma taça será ganha pelo primeiro time que vencer três vezes consecutivas. Qual é a probabilidade de a taça não ser ganha nos $n$ primeiros torneios?

9. Em um jogo, em cada etapa Olavo pode fazer 1 ou 2 pontos. De quantos modos ele pode totalizar $n$ pontos?

10. Mostre que

$$\frac{2\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}(1-\sqrt{5})^n + \frac{2\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}(1+\sqrt{5})^n$$

é para todo $n$ natural, um número inteiro.

11. Mostre que a parte inteira de $(1+\sqrt{3})^{2n+1}$ é sempre par.

## 3.2 Soluções

### Seção 3.1

1.

$$\begin{aligned}
x_2 &= 2x_1 + x_0 = 2.1 + 1 = 3 \\
x_3 &= 2x_2 + x_1 = 2.3 + 1 = 7 \\
x_4 &= 2x_3 + x_2 = 2.7 + 3 = 17 \\
x_5 &= 2x_4 + x_3 = 2.17 + 7 = 41
\end{aligned}$$

2. O número máximo de regiões é determinado quando, para cada $n$, a reta $n+1$ intercepta as $n$ já existentes. Neste caso, a nova reta subdivide $n+1$ regiões,

criando assim $n+1$ novas regiões. Logo, o número máximo de regiões $x_n$ determinado por $n$ retas satisfaz $x_{n+1} = x_n + (n+1)$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$, com $x_0 = 1$.

3. O valor de $x_1$ está bem definido, já que $x_1 = a$. Suponhamos agora que $x_n$ esteja bem definido. Então, como $x_{n+1} = f(x_n)$, o valor de $x_{n+1}$ também está bem definido para todo natural $n$.

4. Os valores de $x_1$ e $x_2$ estão bem definidos, já que $x_1 = a$ e $x_2 = b$. Suponhamos agora que $x_n$ e $x_{n+1}$ estejam bem definidos. Então, como $x_{n+2} = f(x_n, x_{n+1})$, o valor de $x_{n+2}$ também está bem definido. Logo, pelo Principio da Indução Finita, o valor de $x_n$ está bem definido para todos natural $n$.

5. A razão $x_{n+1}/x_n$ entre dois termos consecutivos é constante e igual a 2. Logo, a seqüencia é uma progressão geométrica de razão 2. Como o primeiro termo é $x_1 = 3$, o termo geral é dado por $x_n = 3.2^{n-1}$.

6. A diferencia $x_{n+1} - x_n$ entre dois termos consecutivos é constante e igual a 3. Logo, a seqüencia é uma progressão aritmética de razão 3. Como o primeiro termo é $x_1 = 2$, o termo geral é dado por $x_n = 2 + 3n - 1 = 3n + 1$.

7. O circulo $n+1$ é subdividido em no máximo $2n$ arcos pelos $n$ já existentes. Cada um destes arcos subdivide uma região existente, determinando assim $2n$ regiões. Logo, o número máximo $x_n$ de regiões determinadas por $n$ círculos satisfaz a recursão $x_{n+1} = x_n + 2n$, com $x_1 = 2$.

8. Pelo Exemplo 6, o número $D_n$ de permutações caóticas satisfaz a recursão $D_{n+2} = (n+1)(D_{n+1} + D_n)$, para $n \geq 1$. Por outro lado, $D_1 = 0$ (já que 1 necessariamente ocupa o seu próprio lugar) e $D_2 = 1$ (corresponde à permutação (2,1)). Daí, $D_3 = 2(D_2 + D_1) = 2$, $D_4 = 3(D_3 + D_2) = 9$ e $D_5 = D_4 + D_3 = 44$.

9. Podemos proceder por Indução Finita. É imediato verificar que $D_1 = 0 = 1!(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!})$ e $D_2 = 1 = 2!((\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!}) + \frac{1}{2!})$. Suponhamos agora que a expressão

do número de permutações caóticas esteja correta para $n$ e $n+1$. Temos:

$$\begin{aligned}
D_{n+1} =&(n+1)(D_{n+1} - D_n)\\
=&(n+1)\left(n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} + (n+1)!\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-1)^k}{k!}\right)\\
=&\left((n+1)((n!+(n+1)!)\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right) + (n+1)!\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\\
=&\left((n+1)(1+n+1)n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right) + (n+1)(-1)^{n+1}\\
=&\left((n+1)(n+2)n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right) + ((n+2)-1)(-1)^{n+1}\\
=&(n+2)!\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right) + \frac{(n+2)!}{(n+1)!}(-1)^{n+1} + \frac{(n+2)!}{(n+2)!}(-1)^{n+2}\\
=&(n+2)!\sum_{k=0}^{n+2}\frac{(-1)^k}{k!}
\end{aligned}$$

## Seção 3.2

1. Do problema 2 da seção anterior, o número máximo $x_n$ de regiões em que $n$ retas podem dividir o plano satisfaz a recorrência $x_{n+1} = x_n + n + 1$, com $x_0 = 1$. Daí:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1\\
x_1 &= x_0 + 1\\
x_2 &= x_1 + 2\\
&\\
x_n &= x_{n-1} + n
\end{aligned}$$

Somando, resulta:

$$x_n = 1 + 1 + \cdots + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

2. Seja $x_n$ o número de seqüencias de $n$ termos 0 ou 1 com quantidade ímpar de termos iguais a 0. O número de seqüencias de $n+1$ termos 0 ou 1 com número

ímpar de termos iguais a 0 é igual ao número de seqüencias começadas com 1, seguindo de uma seqüencia de $n$ termos com número ímpar de zeros somado ao número de seqüencias começadas com 0, seguido de uma seqüencia de $n$ termos com um número par de zeros. Portanto, $x_{n+1} = x_n + (2^n - x_n) = 2^n$ (para a segunda parcela, note que $2^n$ é o número total de seqüencias formadas por 0 ou 1). Logo, $x_n = 2^{n-1}$, para todo $n$.

3. Seqüencias de $n + 1$ termos 0, 1 ou 2 com um número ímpar de termos iguais a 0 podem ser de dois tipos: as que começam com 1 ou 2, seguido por uma seqüencia de $n$ termos com número ímpar de zeros e as que começam com 0, seguido por uma seqüencia de $n$ termos com número par de zeros. Daí, temos a recorrência $x_{n+1} = 2x_n + (3^n - x_n)$, ou seja, $x_{n+1} = x_n + 3^n$, com $x_1 = 1$. Termos:

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = x_1 + 3^1$$
$$x_n = x_{n-1} + 3^{n-1}$$

Somando, resulta

$$x^n = 1 + 3 + \cdots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}.$$

4. Suponha que a primeira estaca possui $n + 1$ discos. Para que o último disco possa ser retirado e passado para a terceira estaca, os $n$ discos de cima devem ser passados para a segunda estaca e, a seguir, movidos para a terceira estaca. Logo, representando por $x_n$ o número de movimentos necessários para mover $n$ discos, temos a recorrência $x_{n+1} = 2x_n + 1$, com $x_1 = 1$. Para resolver, podemos empregar a técnica do exemplo 6, buscando inicialmente a solução não nula de $x_{n+1} = 2x_n$; podemos escolher $x_n = 2^{n-1}$. Façamos então a substituição $x_n = 2^{n-1}y_n$. A recorrência se transforma em $2^n y_{n+1} = 2^n y_n + 1$, ou seja, $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2^n}$, com $y_1 = x_1 = 1$.

Temos:

$$y_1 = 1$$
$$y_2 = y_1 + \frac{1}{2}$$
$$y_3 = y_2 + \frac{1}{2^2}$$

$$y_n = y_{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Somando, resulta

$$y_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}$$

Finalmente, $x_n = 2^{n-1} y_n = 2^n - 1$.

5. Para Sheila ganhar a $(n+1)$-ésima partida, ou ela ganha a $n$-ésima partida (com probabilidade $x_n$) e ganha a seguinte (com probabilidade condicional 0,6) ou perde a $n$-ésima (com probabilidade $1 - x_n$) e ganha a seguinte (com probabilidade condicional 0,4). Logo, a probabilidade $x_{n+1}$ de vitória na $(n+1)$-ésima partida é dada por $x_{n+1} = 0,6x_n + 0,4(1 - x_n)$, ou seja, $x_{n+1} = 0,2x_n + 0,4$, com $x_1 = 0,4$. Para resolver a recorrência começamos com uma solução não nula de $x_{n+1} = 0,2x_n$; por exemplo, $a_n = (0,2)^{n-1}$. Fazendo a substituição $x_n = (0,2)^{n-1} y_n$, temos $(0,2)^n y_{n+1} = (0,2)^n y_n + 0,4$, ou seja, $y_{n+1} = y_n + \frac{0,4}{(0,2)^n}$, com $y_1 = x_1/a_1 = 0,4$. Temos:

$$y_1 = 0,4$$
$$y_2 = y_1 + \frac{0,4}{0,2}$$
$$y_3 = y_2 + \frac{0,4}{(0,2)^2}$$

$$y_n = y_{n-1} + \frac{0,4}{(0,2)^{n-1}}$$

Somando, vem

$$y_n = 0,4 + \frac{0,4}{0,2} + \cdots + \frac{0,4}{(0,2)^{n-1}} = 0,4\frac{1 - (0,2)^n}{0,8(0,2)^{n-1}}$$

Finalmente

$$x_n = (0,2)^{n-1} y_n = \frac{1-(0,2)^n}{2}.$$

6. Como visto no exercício 7 da seção anterior, o número máximo $x_n$ de regiões determinadas no plano por $n$ círculos satisfaz a recorrência $x_{n+1} = x_n + 2n$, com $x_1 = 2$. Assim:

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = x_1 + 2$$

$$x_n = x_{n-1} + 2(n-1)$$

Somando, vem

$$x_n = 2 + 2(1 + \cdots + (n-1)) = 2 + n(n-1) = n^2 - n + 2.$$

7. Uma solução da equação homogênea $x_{n+1} = (n+1)x_n$ é $a_n = n!$. Fazendo a substituição $x_n = a_n y_n$, temos

$$(n+1)! y_{n+1} = (n+1) n! y_n + n,$$

ou seja,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{n}{(n+1)!},$$

com $y_1 = \frac{x_1!}{1!} - 1$.

Daí:

$$y_1 = 1$$
$$y_2 = y_1 + \frac{1}{2!}$$

$$y_n = y_{n-1} + \frac{n-1}{n!}$$

Somando:

$$y_n = 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{n-1}{n!}.$$

Mas $\frac{n-1}{n!} = \frac{n-1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$. Logo

$$\begin{aligned} y_n &= 1 + (\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}) + \cdots + \left(\frac{1}{(n-2)!} - \frac{1}{(n-1)!}\right) + \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right) \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{n!} = 2 - \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

Finalmente

$$x_n = n! y_n = 2n! - 1.$$

8. Uma solução da equação homogênea $(n+1)x_{n+1} = -nx_n$ é $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Fazendo a substituição $x_n = a_n y_n$, temos

$$(-1)^{n+1} y_{n+1} = (-1)^{n+1} y_n + 2n - 3,$$

ou seja,

$$y_{n+1} = y_n + (-1)^{n+1}(2n - 3),$$

com $y_1 = \frac{x_1}{a_1} = -1$.

Assim, temos:

$$\begin{aligned} y_1 &= -1 \\ y_2 &= y_1 + (2 - 3) \\ \\ y_n &= y_{n-1} + (-1)^n(2(n-1) - 3) \end{aligned}$$

Somando:

$$y_n = -1 - 1 - 1 + 3 - 5 + 7 - 9 + \cdots + (-1)^n(2(n-1) - 3)$$

Quando $n$ é par,

$$\begin{aligned} y_n &= -2 + (-1 + 3) + (-5 + 7) + (-(2(n-2) - 3)) + (2(n-1) - 3) \\ &= -2 + (n - 2) = n - 4 \end{aligned}$$

e $x_n = a_n y_n = \frac{n}{n} = 1 - \frac{4}{n}$.

Quando $n$ é ímpar, $y_n = (n-5) - (2(n-1) - 3) = -n$ e $x_n = a_n y_n = 1$.

As duas expressões podem ser colocadas em uma única, escrevendo, por exemplo: $x_n = 1 - \frac{2+2(-1)^n}{n}$.

9. Uma solução da equação homogênea $x_{n+1} = nx_n$ é $a_n = (n-1)!$. Fazendo a substituição $x_n = a_n y_n$, temos $n! y_{n+1} = n! y_n + (n+1)!$, ou seja, $y_{n+1} = y_n + (n+1)$, com $y_1 = x_1/a_1 = 1$.

   Assim

$$y_1 = 1$$
$$y_2 = y_1 + 2$$

$$y_n = y_{n-1} + n$$

   Somando,

$$y_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

   e $x_n = a_n y_n = \frac{(n+1)!}{2}$.

10. Seja $x_n$ o número de colorações para $n$ setores e consideremos o problema de colorir $n+1$ setores. O primeiro setor pode ser colorido de $k$ modos e cada setor subseqüente pode ser colorido de $k-1$ modos, já que não pode receber a mesma cor do anterior, resultando em $k(k-1)^n$ colorações. Mas este resultado inclui os casos em que o último setor recebe a mesma cor do primeiro, o que é proibido. Os casos contados indevidamente correspondem às colorações que são válidas, exceto pelo fato de dois setores adjacentes terem a mesma cor. Considerando estes dois setores como um único, estas colorações a serem descontadas correspondem a colorações válidas em um disco dividido em $n$ setores. Portanto, $x_{n+1} = k(k-1)^n - x_n$, com $x_2 = k(k-1)$. Uma solução da equação homogênea $x_{n+1} = -x_n$ é $a_n = (-1)^{n-1}$. Fazendo a substituição $x_n = a_n y_n$, vem $(-1)^n y_{n+1} = (-1)^n y_n + k(k-1)^n$, ou seja $y_{n+1} = y_n + (-1)^n k(k-1)^n$, com $y_2 = x_2/a_2 = -k(k-1)$.

    Assim

$$y_2 = -k(k-1)$$
$$y_3 = y_2 + k(k-1)^2$$

$$y_n = y_{n-1} + (-1)^{n-1} k(k-1)^{n-1}$$

Daí,

$$y_n = k(k-1) - k(k-1)^2 + \cdots + (-1)^{n-1}k(k-1)^{n-1},$$

que é a soma dos termos de uma P.G. de razão $-k(k-1)$. Logo,

$$y_n = -k(k-1)\frac{1-(-1)^{n-1}(k-1)^{n-1}}{1+(k-1)} = -(k-1) + (-1)^n(k-1)^n.$$

Finalmente,

$$x_n = a_n y_n = \frac{-(k-1)+(-1)^n(k-1)^n}{(-1)^n} = (-1)^n(k-1) + (k-1)^n.$$

11. O número de torcedores no ano $n+1$ é $p_{n+1} = p_n(1+i-j) - R$. Uma solução da recorrência homogênea $p_{n+1} = p_n(1+i-j)$ é $a_n = (1+i-j)^{n-1}$. Substituindo $p_n = a_n y_n$ e fazendo $r = 1+i-j$, vem $r^n y_{n+1} = r^n y_n - R$, ou seja, $y_{n+1} = y_n - \frac{R}{r^n}$, com $y_0 = p_0/a_0 = p_0 r$. Assim

$$\begin{aligned} y_0 &= p_0 r \\ y_1 &= y_0 - R \\ y_2 &= y_1 - \frac{R}{r} \\ & \\ y_n &= y_{n-1} - \frac{R}{r^{n-1}} \end{aligned}$$

Somando

$$y_n = p_0 r - R\left(1 + \frac{1}{r} + \cdots + \frac{1}{r^{n-1}}\right) = p_0 - R\frac{r^n - 1}{r^{n-1}(r-1)}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} p_n = a_n y_n = p_0 r^n - R\frac{r^n-1}{r-1} &= \left(p_0 - \frac{R}{r-1}\right)r^n + \frac{R}{r-1} \\ &= \left(p_0 - \frac{R}{i-j}\right)(1+i-j)^n + \frac{R}{i-j}. \end{aligned}$$

A torcida se extingue quando o coeficiente $\left(p_0 - \frac{R}{i-j}\right)$ de $r^n$ é negativo, ou seja quando $R > p_0(i-j)$.

## Seção 3.3

1. a) As raízes da equação característica $r^2 + 5r + 6 = 0$ são $r_1 = -2$ e $r_2 = -3$. Logo, a solução geral é $x_n = C_1(-2)^n + C_2(-3)^n$, onde $C_1$ e $C_2$ são constantes arbitrarias.

   b) A equação característica $r^2 + 6r + 9 = 0$ tem duas raízes iguais a -3. Logo, a solução geral é $x_n = C_1(-3)^n + C_2n(-3)^n$, onde $C_1$ e $C_2$ são constantes arbitrarias.

   c) As raízes da equação característica $r^2 + 4r + 4 = 0$ são os números complexos $r_1 = -1 + i$ e $r_2 = -1 - i$. Logo, a solução geral é $x_n = C_1(-1+i)^n + C_2(-1-i)^n$, onde $C_1$ e $C_2$ são constantes arbitrarias. Usando o fato de que as raízes são números complexos de modulo $\sqrt{2}$ e argumento $\pm\frac{3\pi}{4}$, esta solução pode ser escrita na forma $x_n = C_1 \cos\frac{3n\pi}{4} + \text{sen}\,\frac{3n\pi}{4}$.

   d) Como as raízes da equação característica $r^2 - 5r + 6 = 0$ são $r_1 = 2$ e $r_2 = 3$, a solução geral da equação homogênea é $x_n = C_1 2^n + C_2 3^n$. Por outro lado, tentando uma solução particular da forma $x_n = An + B$, obtemos $2An + 2B - 3A = n$, que se verifica quando $A = \frac{1}{2}$ e $B = \frac{3}{4}$. Portanto, $x_n = \frac{1}{2}n + \frac{3}{4}$ é uma solução particular e, em conseqüência, a solução geral da equação não-homogênea é $x_n = \frac{1}{2}n + \frac{3}{4} + C_1 2^n + C_2 3^n$.

   e) A solução geral da homogênea é a mesma do exercício anterior. Tentando uma solução particular da forma $x_n = An + B + C4^n$, obtemos $2An + 2B - 3A + 2C4^n = 1 + 3.4^n$, que se verifica para $A = 0$, $B = 1/2$ e $C = 3/2$, mostrando que $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}4^n$ é uma solução particular. Logo, a solução geral da equação não-homogênea é $x_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}4^n + C_1 2^n + C_2 3^n$.

   f) A solução geral da homogênea é a mesma dos exercícios anteriores. Como $x_n = 2^n$ é solução da homogênea, na busca por uma solução particular temos $x_n = An2^n$, o que leva a $A(n+2)2^{n+2} \quad 5A(n+1)2^{n+1} + 6An2^n$. Daí, obtemos $A = -\frac{1}{2}$, que fornece a solução particular $x_n = -\frac{1}{2}n2^n = -n2^{n-1}$. A solução geral da equação não homogênea é $x_n = -\frac{1}{2}n2^n = -n2^{n-1} + C_1 2^n + C_2 3^n$.

   g) A solução geral da homogênea é a mesma dos exercícios anteriores. Como $x_n = 3^n$ é solução da homogênea e o termo não homogêneo é $n + 3^n$, vamos a buscar uma solução particular da forma $x_n = An + B + Cn3^n$.

Substituindo na equação, obtemos

$$A(n+2) + B + C(n+2)3n + 2 - 5A(n+1) - 5B$$
$$-5C(n+1)3^{n+1} + 6An + 6B + Cn3^n = n + 3^n.$$

Simplificando, vem $2An - 3A + 2B + 5C3^n - n + 3^n$, que é satisfeita para $A = 1/2$, $B = 3/4$ e $C = 1/5$. Logo, uma solução particular é $x_n = \frac{1}{2}n + \frac{3}{4} + \frac{1}{5}3^n$ e a solução geral da equação não homogênea é $x_n - \frac{1}{2}n + \frac{3}{4} + \frac{1}{5}3^n + C_1 2^n + C_2 3^n$.

h) A equação característica $r^2 - 6r + 9 = 0$ tem duas raízes iguais a 3. Logo, a solução geral da equação homogênea é $x_n = C_1 3^n + C_2 n 3^n$. Como o termo não homogêneo é $n - 3^n$, mas tanto $3^n$ quanto $n3^n$ são soluções da homogênea, tentamos uma solução particular da forma $An + B + Cn^2 3^n$. Substituindo na equação, obtemos

$$A(n+2) + B + C(n+2)^2 3^{n+2} - 6A(n+1)$$
$$-6B - 6C(n+1)^2 3^{n+1} + 9An + 9B + 9Cn^2 3^n = n - 3^n.$$

Simplificando, vem $4An - 4A + 4B + 18C3^n = n - 3^n$, que é satisfeita por $A = 1/4$, $B = 1/4$ e $C = -1/18$, que leva à solução particular $x_n = \frac{n}{4} + \frac{1}{4} - \frac{n^3 3^n}{4}$ e à solução geral $x_n = \frac{n}{4} + \frac{1}{4} - \frac{n^3 3^n}{4} + C_1 3^n + C_2 n 3^n$.

i) As soluções da equação característica $r^2 + 1 = 0$ são $r_1 = i$ e $r_2 = -i$. A solução geral da equação homogênea é $x_n = C_1 i^n + C_2(-i)^n = C_1 \cos \frac{n\pi}{2} + C_2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}$. Tentando uma solução particular da forma $x_n = A$, obtemos $2A = 1$, ou seja, $x_n = A = 1/2$. A solução geral da equação não homogênea é, portanto, $x_n = \frac{1}{2} + C_1 \cos \frac{n\pi}{2} + C_2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}$.

j) Como no ítem h), a solução da homogênea é $x_n = C_1 3^n + C_2 n 3^n$. Tentando, como em h), uma solução particular da forma $An + B + Cn^2 3^n$, chegamos a $4An - 4A + 4B + 18C3^n = 1 + n3^n$. Observando que é necessário elevar o grau do termo que multiplica $3^n$; por outro lado, não é preciso incluir na solução particular um termo em $n$. Devemos tentar, assim, uma solução particular na forma $x_n = A + (Bn^2 + Cn^3)3^n$. Substituindo na equação e simplificando obtemos $4A + 54Bn3^n + (54B + 18C)3^n = 1 + 3^n$, que é satisfeita para $A = 1/4$, $B = 1/54$ e $C = -1/18$, levando à solução particular $x_n = \frac{1}{4} + \frac{n^2 3^n}{54} - \frac{n^3 3^n}{18}$ e à solução geral $x_n = \frac{1}{4} + \frac{n^2 3^n}{54} - \frac{n^3 3^n}{18} + C_1 3^n + C_2 3^n$.

2. a) No exercício 1a), encontramos a solução geral $x_n = C_1(-2)^n + C_2(-3)^n$. Substituindo $n = 0$ e $n = 1$ na solução, encontramos:

$$C_1 + C_2 = 3$$
$$-2C_1 - 3C_2 = -6$$

Resolvendo, encontramos $C_1 = 0$ e $C_2 = 3$, levando à solução $x_n = 3(-2)^n$.

b) As soluções da equação característica $r^2 + r - 6 = 0$ são $r_1 = 2$ e $r_2 = -3$, conduzindo à solução geral $x_n = C_1 2^n + C_2(-3)^n$ para a solução homogênea. Tentando uma solução particular da forma $x_n = An + B$, encontramos que a equação é satisfeita para $A = 2$ e $B = 0$. Assim, $x_n = 2n$ é uma solução particular e $x_n = 2n + C_1 2^n + C_2(-3)^n$ é a solução geral da equação não homogênea.

Substituindo $n = 0$ e $n = 1$ nesta solução, obtemos:

$$C_1 + C_2 = 1$$
$$2C_1 - 3C_2 = 2$$

Resolvendo, encontramos $C_1 = 0$ e $C_2 = 1$. Portanto, a solução é $x_n = 2n + 2^n$

c) A equação característica $r^2 - 4r + 4 = 0$ tem duas raízes iguais a 2, conduzindo à solução geral $x_n = C_1 2^n + C_2 n 2^n$ para a parte homogênea. Tentando uma solução particular da forma $x_n = An^2 2^n$, verificamos que $x_n = n^2 2^n$ é uma solução particular e que, assim, $x_n = n^2 2^n + C_1 2^n + C_2 n 2^n$ é a solução geral da equação não homogênea.

Substituindo $n = 0$ e $n = 1$ encontramos:

$$C_1 = 3$$
$$2C_1 + 2C_2 = 4$$

Resolvendo, encontramos $C_1 = 3$ e $C_2 = -1$. Logo, a solução da equação é $x_n = 32^n - n2^n + n^2 2^n$

3. Seja $x_n$ o número de seqüencias formadas por $n$ termos iguais a 0, 1 ou 2 sem dois zeros repetidos. As seqüencias de $n + 2$ termos que não tem dois termos consecutivos podem começar por 0, 1 ou 2 . As que começam por 0 tem o próximo elemento igual a 1 ou 2 e, a seguir, uma seqüencia de $n$ termos sem

zeros repetidos. Logo, há $2x_n$ tais seqüencias. As que começam por 1 ou 2 têm, a seguir uma seqüencia de $n+1$ termos sem zeros repetidos. Logo, há $2x_{n+1}$ seqüencias deste tipo. Assim, $x_n$ satisfaz a recorrência $x_{n+2} = 2x_n + 2x_{n+1}$, ou seja, $x_{n+2} - 2x_{n+1} - 2x_n = 0$, com $x_1 = 3$ e $x_2 = 8$ (todas as 3 seqüencias de comprimento 1 cumprem o requisito e todas as $3^2 = 9$ de comprimento 2, exceto a 00, também cumprem a condição).

As raízes da equação característica $r^2 - 2r - 2 = 0$ são $r_1 = 1+\sqrt{3}$ e $r_2 = 1-\sqrt{3}$, levando à solução geral $x_n = C_1(1+\sqrt{3})^n + C_2(1+\sqrt{3})^n$ para a recorrência. Substituindo $n = 1$ e $n = 2$, obtemos

$$(1+\sqrt{3})C_1 + (1-\sqrt{3})C_2 = 3$$
$$(3+2\sqrt{3})C_1 + (3-2\sqrt{3})C_2 = 8$$

Resolvendo o sistema, encontramos $C_1 = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}$ e $C_2 = \frac{3-2\sqrt{3}}{6}$. Logo o número de seqüencias por $n$ termos iguais a 0, 1 ou 2 sem dois zeros repetidos é $x_n = \frac{3-2\sqrt{3}}{6}(1+\sqrt{3})^n + \frac{3+2\sqrt{3}}{6}(1-\sqrt{3})^n$.

4. Considere um tabuleiro com 2 linhas e $n+2$ colunas. Para preencher o canto esquerdo do tabuleiro, há duas alternativas: colocar um dominó "em pé", restando tabuleiro com 2 linhas e $n+1$ colunas a preencher, ou colocar dois dominós "deitado" restando um tabuleiro com 2 linhas e $n$ colunas. Logo, o número $x_n$ de modos de preencher um tabuleiro $2 \times n$ com dominós $2 \times 1$ satisfaz a recorrência $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$, com $x_1 = 1$ e $x - 2 = 2$. Esta é exatamente a seqüencia de Fibonacci estudada no exemplo 4. Logo, temos $x_n = F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$.

5. Todos os casais que geram casais de filhotes no mês $n+1$ geram, novamente, um casal de filhotes no mês $n+2$. Além disso, os casais que nasceram no mês $n$ geram seus primeiros casais de filhotes no mês $n+2$. Portanto, o número $x_n$ de casais gerados no mês $n$ satisfazem a recorrência $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, com $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$ (já que os filhotes nascidos no primeiro mês ainda não geram filhotes no segundo). Novamente, temos a recorrência da seqüencia de Fibonacci, mas com uma condição inicial diferente. Na verdade, é a seqüencia de Fibonacci "atrasada", com valores para $n = 1$ e $n = 2$ correspondentes aos valores para $n = 0$ e $n = 1$ da seqüencia de Fibonacci original. Portanto, $x_n = F_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

6. No ano $n+2$ são geradas 21 sementes para cada semente gerada no ano $n+1$ e 44 sementes para cada semente gerada nos anos anteriores. Logo, se $x_n$ denota o número de sementes geradas no ano $n$, temos

$$x_{n+2} = 21x_{n+1} + 44(x_n + x_{n-1} + \cdots + x_1 + x_0),$$

com $x_1 = 1$ e $x_2 = 44 + 21.21 = 485$. Para transformar esta recorrência em uma recorrência linear de segunda ordem, escrevemos a expressão para $x_{n+1}$:

$$x_{n+1} = 21x_n + 44(x_{n-1} + x_{n-2} + \cdots + x_1 + x_0),$$

Subtraindo as duas expressões, obtemos:

$$x_{n+2} = 22x_{n+1} + 23x_n,$$

ou seja,

$$x_{n+2} - 22x_{n+1} - 23x_n = 0$$

A equação característica $r^2 - 22r - 23 = 0$ tem raízes $r_1 = 23$ e $r_2 = -1$, levando à solução geral $x_n = C_1 23^n + C_2(-1)^n$ para a recorrência. Usando as condições iniciais, obtemos

$$\begin{aligned} 23C_1 - C_2 &= 21 \\ 529C_1 + C_2 &= 485 \end{aligned}$$

Resolvendo, encontramos $C_1 = 11/12$ e $C_2 = 1/12$. A solução da recorrência é, assim, $x_n = \frac{11}{12}23^n + \frac{1}{12}(-1)^n$.

7. A renda $x_n$ no mês $n$ é igual ao salário $S_n$ mais o rendimento sobre montante $y_{n-1}$ das aplicações financeiras no mês anterior. Ou seja, $x_n = S_n + iy_{n-1}$. Por outro lado, o montante das aplicações financeiras no mês $n$ é igual ao do mês anterior, acrescido do valor poupado no mês $n$. Ou seja, $y_n = y_{n-1} + \frac{1}{p}x_n$. Da primeira equação, tiramos $y_{n-1} = \frac{x_n - S_n}{i}$ e $y_n = \frac{x_{n+1} - S_{n+1}}{i}$. Substituindo estas expressões na segunda equação, vem $\frac{x_{n+1} - S_{n+1}}{i} = \frac{x_n - S_n}{i} + \frac{1}{p}x_n$, ou seja, $x_{n+1} \quad \left(1 + \frac{i}{p}\right)$. Fazendo a substituição $x_n = a_n z_n$, encontramos $k^{n-1}z_n = k^{n-1}z_{n-1} + b$, ou seja, $z_n = z_{n-1} + \frac{b}{k^{n-1}}$. Assim, como $x_0 = a$, temos $z_0 =$

$a/k^{-1} = ak$ e:

$$z_0 = ak$$
$$z_1 = z_0 + b$$
$$z_n = z_{n-1} + \frac{b}{k^{n-1}}$$

Somando, vem:

$$z_n = ak + b\frac{1-k^n}{k^{n-1}(1-k)}$$

e

$$x_n = a_n z_n = ak^n + b\frac{1-k^n}{1-k}$$

Substituindo $k = \left(1 + \frac{i}{p}\right)$, temos, finalmente

$$x_n = \left(a + \frac{pb}{i}\right)\left(1 + \frac{i}{p}\right)^n - \frac{pb}{i}.$$

8. Seja $p_n$ a probabilidade de que a taça não seja ganha nos primeiros $n$ torneios. Qualquer time pode ganhar o primeiro torneio. Vamos exprimir $p_{n+2}$ em função de $p_n$ e $p_{n+1}$ usando probabilidade condicional. Se o segundo torneio for ganho por um time diferente do que ganhou o primeiro (o que ocorre com probabilidade $\frac{4}{5}$), tudo se passa como se a série de torneios estivesse começando no segundo torneio. Ou seja, a probabilidade condicional de que a taça não seja ganha até o torneio $n+2$ é igual a $p_{n+1}$. Se o segundo torneio for ganho pelo mesmo time do primeiro, mas no terceiro não (ocorre com probabilidade $\frac{1}{5}.\frac{4}{5}$), tudo se passa como se a série de torneios começasse no terceiro jogo e a probabilidade condicional de que a taça não seja ganha até o torneio $n+2$ torneio é igual a $p_n$. Finalmente, se os três primeiros torneios forem ganhos pelo mesmo time, a taça é ganha na terceira realização e, portanto, a probabilidade condicional de que ela não tenha sido ganha até o torneio $n+2$ é igual a zero, para todo $n \geq 1$. Assim, temos $p_{n+2} = \frac{4}{5}p_{n+1} + \frac{1}{5}.\frac{4}{5}p_n$, com $p_1 = p_2 = 1$ (já que a taça certamente não é ganha nas duas primeiras realizações). A equação característica $r^2 - \frac{4}{5}r - \frac{1}{5}.\frac{4}{5} = 0$ tem raízes $r_1 = \frac{2+2\sqrt{2}}{5}$ e $r_2 = \frac{2-2\sqrt{2}}{5}$. Logo, a solução geral da recorrência é $p_n = C_1\left(\frac{2+2\sqrt{2}}{5}\right)^n + C_2\left(\frac{2-2\sqrt{2}}{5}\right)^n$.

Substituindo $n = 1$ e $n = 2$, temos:

$$\left(\frac{2+2\sqrt{2}}{5}\right) C_1 + \left(\frac{2-2\sqrt{2}}{5}\right) C_2 = 1$$
$$\left(\frac{12+8\sqrt{2}}{25}\right) C_1 + \left(\frac{12-8\sqrt{2}}{25}\right) C_2 = 1$$

Resolvendo, encontramos $C_1 = \frac{10+5\sqrt{2}}{16}$ e $C_2 = \frac{10-5\sqrt{2}}{16}$, levando à solução $p_n = \frac{10+5\sqrt{2}}{16}\left(\frac{2+2\sqrt{2}}{5}\right)^n + \frac{10-5\sqrt{2}}{16}\left(\frac{2-2\sqrt{2}}{5}\right)^n$

9. Seja $x_n$ o número de modos de obter 1 ou 2 pontos no primeiro jogo. No primeiro caso, ele tem que obter $n+1$ pontos nos jogos seguintes; no segundo caso, ele tem que obter $n$ pontos a seguir. Logo, $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$, com $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$. Esta é a recorrência que define a seqüencia de Fibonacci $F_n$. Logo, $x_n = F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$, para todo $n$.

10. Os números $r_1 = (1-\sqrt{5})$ e $r_2 = (1+\sqrt{5})$ são as raízes da equação $r^2 - 2r - 4 = 0$. Portanto, a seqüencia $x_n = \frac{2\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}(1-\sqrt{5})^n + \frac{2\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}(1+\sqrt{5})^n$ satisfaz a recorrência $x_{n+2} = 2x_{n+1} + 4x_n$. Além disso, substituindo os valores $n = 0$ e $n = 1$, obtemos $x_0 = 2$ e $x_1 = 1$. Assim, $x_0$ e $x_1$ são naturais e a recorrência nos garante que, se $x_n$ e $x_{n+1}$ são naturais, então $x_{n+2}$ também é. Portanto, pelo Principio de Indução Finita, $x_n$ é natural para todo $n$.

11. Para cada $n$ natural, o número $x_n = (1+\sqrt{3})^{2n+1} + (1-\sqrt{3})^{2n+1}$ é um inteiro par, pois os termos que contém $\sqrt{3}$ se cancelam e os demais (que são inteiros) aparecem duas vezes. Alternativamente, poderíamos argumentar como no exercício 10: $(1+\sqrt{3})^2$ e $(1-\sqrt{3})^2$ são raízes da equação $r^2 - 8r - 4 = 0$. Logo, $x_n$ satisfaz a equação de recorrência $x_{n+2} = 8x_{n+1} + 4x_n$. Como $x_0 = 2$ e $x_1 = 20$, decorre por indução que $x_n$ é inteiro par para todo $n$.

    Por outro lado, $-1 < 1-\sqrt{3} < 0$, já que $\sqrt{3} \approx 1,73$. Logo, $-1 < (1-\sqrt{3})^{2n+1} < 0$, pata todo $n$. Somando $(1+\sqrt{3})^{2n+1}$ a todos os termos desta desigualdade, obtemos $(1+\sqrt{3})^{2n+1} - 1 < (1+\sqrt{3})^{2n+1} + (1-\sqrt{3})^{2n+1} < (1+\sqrt{3})^{2n+1}$, ou seja, $(1+\sqrt{3})^{2n+1} - 1 < x_n < (1+\sqrt{3})^{2n+1}$, o que mostra que o número inteiro par $x_n$ é a parte inteira de $(1+\sqrt{3})^{2n+1}$.

# CAPÍTULO 4

## Combinatória

## 4.1 Exercícios

### Seção 4.1

1. Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 10 questões de múltipla-escolha, com 5 alternativas de questão?

2. Quantos subconjunto possui um conjunto de $n$ elementos?

3. De quantos modos 3 pessoas podem se sentar em 5 cadeiras em fila?

4. De quantos modos 5 homens e 5 mulheres podem se sentar em 5 bancos de 2 lugares, se em cada banco deve haver um homem e uma mulher?

5. De quantos modos podemos colocar 2 reis diferentes em casas não-adjacentes de um tabuleiro de $8 \times 8$? E se os reis fossem iguais?

6. de quantos modos podemos colocar 8 torres iguais em um tabuleiro de $8 \times 8$, de modo que não que não haja duas torres na mesma linha ou na mesma coluna? E se as torres fossem diferentes?

7. De um baralho comum de 52 cartas, sacam-se sucessivamente e sem reposição duas cartas. De quantos modos isso pode ser feito se a primeira carta deve ser de copas e a segunda não deve ser um rei?

8. O conjunto $A$ possui 4 elementos e, o conjunto $B$, 7 elementos. Quantas funções $f : A \to B$ existem? Quantas delas são injetoras?

9. a) De quantos modos o número 720 pode ser descomposto em um produto de dois inteiros positivos? Aqui aqui consideramos, naturalmente, $8 \times 90$ como sendo o mesmo que $90 \times 8$.

   b) E o número 144?

10. Em um corredor há 900 armários, numerados de 1 a 900, inicialmente todos fechados. 900 pessoas, numeradas de 1 a 900, atravessam o corredor. A pessoa de número $k$ reverte o estado de todos os armários cujos números são múltiplos de $k$. Por exemplo, a pessoa de número 4 mexe nos armários de números 4, 8, 12,..., abrindo os que encontra fechados e fechando os que encontra abertos. Ao final, quais armários ficarão abertos?

11. Dispomos de 5 cores distintas. De quantos modos podemos colorir os quatro quadrantes de um circulo, cada quadrante com uma só cor, se quadrantes cuja fronteira é uma *linha* não podem receber a mesma cor?

12. De quantos modos podemos formar uma palavra de 5 letras de um alfabeto de 26 letras, se a letra $A$ deve figurar na palavra mas não pode ser a primeira letra da palavra? E se a palavra devesse ter letras distintas?

13. As placas dos veículos são formadas por três letras (de um alfabeto de 26) seguidas por 4 algarismos. Quantas placas poderão ser formadas?

14. Um vagão de metrô tem 10 bancos individuais, sendo 5 de frente e 5 de costas. De 10 passageiros, 4 preferem sentar de frente, 3 preferem sentar de costas e os demais não tem preferência. De quantos modos eles podem se sentar, respeitadas as preferências?

15. Escrevem-se os inteiros de 1 até 2222. Quantas vezes o algarismo 0 é escrito?

16. Quantos são os inteiros positivos de 4 dígitos nos quais o algarismo 5 figura?

17. Em uma banca há 5 exemplares iguais da "Veja", 6 exemplares iguais da "Manchete" e 4 exemplares iguais da "Isto é". Quantas coleções não-vazias de revistas dessa banca podem ser formadas?

18. Uma turma tem aulas as segundas, quartas e sextas, de 13h às 14h e 14h às 15h. As matérias são Matemática, Física e Química, cada uma com duas aulas semanais, em dias diferentes. De quantos modos pode ser feito o horário dessa turma?

19. O problema do Exemplo 1 - Com 5 homens e 5 mulheres, de quantos modos se pode formar um casal? - foi resolvido por um aluno do modo a seguir: "A primeira pessoa do casal pode ser escolhida de 10 modos, pois ela pode ser homem o mulher. Escolhida a primeira pessoa, a segunda pessoa só poderá ser escolhida de 5 modos, pois deve ser de sexo diferente da primeira pessoa. Há portanto $10 \times 5 = 50$ modos de formar um casal". Onde está o erro?

20. Escrevem-se números de 5 dígitos, inclusive os começados em 0, em cartões. Como 0, 1 e 8 não se alteram de cabeça para baixo e como 6, de cabeça para baixo, se transforma em 9 e vice-versa, um mesmo cartão pode representar dois números (por exemplo, 06198 e 86190). Qual é o número mínimo de cartões para representar todos os números de 5 dígitos?

21. Qual é a soma dos divisores positivos de 360?

## Seção 4.2

1. Quantos são os anagramas da palavra "CAPÍTULO".

   a) possíveis?

   b) que começam e terminam em vogal?

   c) que têm as vogais e as consoantes intercaladas?

   d) que têm as letras $c$, $a$, $p$ juntas nessa ordem?

   e) que têm as letras $c$, $a$, $p$ juntas em qualquer ordem?

   f) que têm a letra $p$ em primeiro lugar e a letra $a$ em segundo?

   g) que têm a letra $p$ em primeiro lugar ou a letra $a$ em segundo?

   h) que têm a $p$ em primeiro lugar ou a $a$ em segundo ou $c$ em terceiro?

i) nos quais a letra $a$ é uma das letras à esquerda de $p$ e a letra $c$ é uma das letras à direita de $p$?

2. Se $A$ é um conjunto de $n$ elementos, quantas são as funções $f : A \to A$ injetoras?

3. De quantos modos é possível colocar 8 pessoas em fila de modo que duas dessas pessoas, Vera e Paulo, não fiquem juntas?

4. De quantos modos é possível colocar 8 pessoas em fila de modo que duas dessas pessoas, Vera e Paulo, não fiquem juntas e duas outras, Helena e Pedro, permaneçam juntas?

5. Quantas são as permutações simples dos números $1, 2, 3, \ldots, 10$, nas quais o elemento que ocupa o lugar de ordem $k$, da esquerda para a direita, é sempre maior que $k - 3$?

6. De quantos modos é possível dividir 15 atletas em três times de 5 atletas, denominados Esporte, Tupi e Minas?

7. De quantos modos é possível dividir 15 atletas em três times de 5 atletas?

8. De quantos modos é possível dividir 20 objetos em 4 grupos de 3 e 2 grupos de 4?

9. Um campeonato é disputado por 12 clubes em rodadas de 6 jogos cada. De quantos modos é possível selecionar os jogos da primeira rodada?

10. Permutam-se de todas as formas possíveis os algarismos 1, 2, 4, 6, 7 e escrevam-se os números assim formados em ordem crescente. Determine:

    a) que lugar ocupa o número 62417.
    b) que número ocupa o 66º lugar.
    c) qual o 666º algarismo escrito.
    d) a soma dos números assim formados.

11. De quantos modos é possível colocar $r$ rapazes e $m$ moças em fila de modo que as moças permaneçam juntas?

12. Quantos dados diferentes é possível formar gravando números de 1 a 6 sobre as faces de um cubo?

a) Suponha uma face de cada cor.

b) Suponha as faces iguais.

c) Suponha as faces são iguais e que a soma dos pontos de face opostas deva ser igual a 7.

13. Resolva o problema anterior, no caso b), para os outros 4 poliedros regulares.

14. Determine $n$ para que $\sum_{k=1}^{n} k!$ seja um quadrado perfeito.

15. Quantos são os anagramas da palavra "ESTRELADA"?

16. O conjunto $A$ possui $n$ elementos. Quantos são os seus subconjuntos com $p$ elementos?

17. Uma faculdade realiza seu vestibular em dois dias de provas, com 4 matérias em cada dia. Este ano a divisão foi: Matemática, Português, Biologia e Inglês no primeiro dia e Geografia, Historia, Física e Química no segundo dia. De quantos modos pose ser feito o calendário de provas?

18. Qual é o erro da solução abaixo?

"Com 5 homens e 4 mulheres, quantas comissões de 5 pessoas, com pelo menos 3 homens, podem ser formadas?

Solução: Primeiramente vamos escolher 3 homens para a comissão, o que pode ser feito de $C_5^3 = 10$ modos. Agora devemos escolher mais duas pessoas para a comissão, homens ou mulheres, entre as 6 pessoas restantes, o que pode ser feito de $C_5^2 = 15$. A resposta é $10 \times 15 = 150$"

19. Quantas diagonais possui:

a) um octaedro regular?

b) um icosaedro regular?

c) um dodecaedro regular?

d) um cubo?

e) um prisma hexagonal regular?

20. Sejam $I_m = \{1, 2, \ldots, m\}$ e $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, com $m \leq n$. Quantas são as funções $f : I_m \to I_n$ estritamente crescentes?

21. Quantos são os números naturais de 7 dígitos nos quais o digito 4 figura exatamente 3 vezes e o digito 8 exatamente 2 vezes?

22. Quantos são os subconjuntos de $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, com $p$ elementos, nos quais:

a) $a_1$ figura;

b) $a_2$ não figura;

c) $a_1$ e $a_2$ figuram;

d) pelo menos um dos elementos $a_1$, $a_2$ figura;

e) exatamente um dos elementos $a_1$ e $a_2$ figura.

23. De um baralho de pôquer (7, 8, 9, 10, valete, dama, rei e ás, cada um desses grupos aparecendo em 4 naipes: copas, outros, paus, espadas), sacam-se simultaneamente 5 cartas.

a) Quantas são as extrações possíveis?

Quantas são as extrações nas quais se forma:

b) um par (duas cartas em um mesmo grupo e as outras três em três outros grupos diferentes)?

c) dois pares (duas cartas em um grupo, duas em outro grupo e uma em um terceiro grupo)?

d) uma trinca (três cartas em um grupo e as outras em dois outros grupos diferentes)?

e) um "four" (quatro cartas em um grupo e uma em outro grupo)?

f) um "full hand" (três cartas em um grupo e duas em outro grupo)?

g) uma seqüencia (5 cartas de grupos consecutivos, não sendo todas do mesmo naipe)?

h) um "flush" (5 cartas do mesmo naipe, não sendo elas de 5 grupos consecutivos)?

i) um "straight flush" (5 cartas de grupos consecutivos, todas do mesmo naipe)?

j) um "royal straight flush" (10, valete, dama, rei e ás de um mesmo naipe)?

24. O conjunto $A$ possui $p$ elementos e o conjunto $B$ possui $n$ elementos. Determine o número de funções $f : A \to B$ sobrejetoras para:

    a) $p = n$

    b) $p = n + 1$

    c) $p = n + 2$

25. Considere um conjunto $C$ de 20 pontos do espaço que tem um subconjunto $C_1$ formado por 8 pontos coplanares, Sabe-se que toda vez que 4 pontos de $C$ são coplanares, então eles são pontos de $C_1$. Quantos são os planos que contêm pelo menos três pontos de $C$?

26. Uma fila de cadeiras no cinema tem 10 poltronas. De quantos modos 3 casais podem se sentar nessas poltronas de modo que nenhum marido se sente separado de sua mulher?

27. Quantos são os anagramas da palavra "PARAGUAIO" que não possuem consoantes adjacentes?

28. De quantos modos podemos selecionar $p$ elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ sem selecionar dois números consecutivos?

29. Onze cientistas trabalham num projeto sigiloso. Por questões de segurança, os planos são guardados em um cofre protegido por muitos cadeados do modo que só é possível abri-los todos se houver pelo menos 5 cientistas presentes.

    a) Qual é o número mínimo possível de cadeados?

    b) Na situação do ítem a), quantas chaves cada cientista deve ter?

30. Depois de ter dado um curso, um professor resolve se despedir de seus 7 alunos oferecendo, durante 7 dias consecutivos, 7 jantares para 3 alunos cada. De quantos modos ele pode fazer os convites se ele no deseja que um mesmo par de alunos compareça a mais de um jantar?

31. Formam-se as combinações simples de classe 5 dos elementos $a_1$, $a_2$, $\ldots$, $a_{12}$, as quais são escritas com os elementos em ordem crescente de índices. Quantas são as combinações nas quais o elemento $a_8$ ocupa p $3^{\underline{o}}$ lugar?

32. De quantos modos é possível colocar em fila $h$ homens e $m$ mulheres, todos de alturas diferentes, de modo que os homens entre si e as mulheres entre si fiquem em ordem crescente de altura?

33. Em uma escola, $x$ professores se distribuem em 8 bancas examinadoras de modo que cada professor participa de exatamente duas bancas e cada duas bancas têm exatamente um professor em comum.

    a) Calcule $x$

    b) Determine quantos professores há em cada banca.

34. A partir de um conjunto de $a$ atletas formam-se $t$ times de $k$ atletas cada. Todos os atletas participam de um mesmo número de times e cada par de atletas fica junto no mesmo time um mesmo número de vezes. Determine:

    a) de quantos times cada atleta participa;

    b) em quantos times cada par de atletas fica junto.

35. De quantos modos podemos formar uma mesa de buraco com 4 jogadores?

36. De quantos modos podemos formar uma rola de crianças com 5 membros e 5 meninas de modo que pessoas de mesmo sexo não fiquem juntas?

37. De quantos modos podemos formar uma roda de crianças com 6 crianças, de modo que duas delas, Vera e Isadora, não fiquem juntas?

38. Quantas são as soluções inteiras e positivas de $x + y + z = 7$?

39. Quantas são as soluções inteiras e não-negativas de $x + y + z \leq 6$?

40. Uma indústria fabrica 5 tipos de balas que são vendidas em caixas de 20 balas, de um só tipo ou sortidas. Quantos tipos de caixas podem ser montados?

## seção 4.4

1. Com 7vitaminas diferentes, quantos coquetéis de duas o mais vitaminas podemos formar?

2. Determine $p$ para que seja máximo:

    a) $C_1 0^p$

b) $C_2 1^p$

3. Determine o termo independente de $x$ no desenvolvimento de

$$\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^1 0.$$

4. Determine o coeficiente de $x^n$ no desenvolvimento de $(1-x)^2 \cdot (x+2)^n$.

5. Determine o valor da soma $C_n^0 + 3C_n^1 + 3^2C_n^2 + \cdots + 3^nC_n^m$.

6. Se $(1+x+x^2)^n = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_{2n}x^{2n}$, determine o valor de:

   a) $A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_{2n}$

   b) $A_0 + A_2 + A_4 + \cdots + A_{2n}$

7 Determine o termo máximo do desenvolvimento de

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^{100}$$

8. Prove que $101^{50} > 99^{50} + 100^{50}$

## 4.2 Soluções

### Seção 4.1

1. A primeira pergunta pode ser respondida de 5 modos; a segunda, de 5 modos, etc.

   A resposta é $5 \times 5 \times \cdots \times 5 = 5^10 = 9.765.625$.

2. Para formar um subconjunto, deve-se decidir, para cada elemento do conjunto, se ele pertencerá ou não ao subconjunto. Há 2 modos de decidir o que fazer com o primeiro elemento do conjunto, 2 modos com o segundo, etc.

   A resposta é $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$

   **Outra Solução:**

   Quando se acrescenta um elemento a um conjunto, os subconjuntos do novo conjunto são os subconjuntos dobra. Então, se $A_n$ é o número de subconjuntos de um conjunto com $n$ elementos, $(A_n)$ é uma progressão geométrica de razão 2. Logo, $A_n = A_0.2^n = 2^n$ pois o conjunto vazio possui um único subconjunto.

3. A primeira pessoa tem 5 escolhas; a segunda, 4; a terceira, 3. A resposta é $5 \times 4 \times 3 = 60$.

4. Os bancos em que os homens se sentam podem ser escolhidos de $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ modos, o mesmo ocorrendo com os bancos das mulheres. Em cada banco, os casais podem se sentar de 2 modos diferentes. A resposta é $120^2 \times 2^5 = 460.800$.

5. As 64 casas do tabuleiro dividem-se, naturalmente, em três grupos:

   roman*) as 4 casas dos vértices;

   roman*) as 24 casas da borda do tabuleiro, mas que não são vértices;

   roman*) as restantes 36 casas, que são interiores ao tabuleiro.

   Vamos separar a nossa contagem conforma o tipo de casa ocupada pelo rei negro:

   roman*) há 4 possíveis para o rei negro e 60 para o rei branco;

   roman*) há 24 possíveis para o rei negro e 58 para o rei branco;

   roman*) há 36 possíveis para o rei negro e 55 para o rei branco.

   A resposta é $4 \times 60 \times 24 \times 58 + 36 \times 55 = 3612$.

   Se os reis são iguais, a resposta passa a ser a metade da resposta anterior, pois, trocando a posição dos reis, agora obtém-se a mesma configuração.

6. Haverá uma torre em cada linha e em cada coluna. A posição da torre da primeira linha pode ser escolhida de 8 modos; a da segunda linha, de 7, etc.

   A resposta é $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40.320$.

   Se as torres fossem diferentes, para cada uma das escolhas de posição, teríamos que escolher uma das torres. A resposta seria, portanto, $8 \times 8 \times 7 \times 7 \times 6 \times 6 \times 5 \times 5 \times 4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = (8!)^2 = 1.625.702.400$.

7. Se a primeira carta é o rei de copas, a segunda pode ser escolhida de 48 modos (pode ser qualquer carta, exceto os 4 reis). Se a primeira carta é de copas mas não é o rei, ela pode ser escolhida de 12 modos. Neste caso, a segunda carta pode ser escolhida de 47 modos (não pode ser a primeira escolhida, nem nenhum dos 4 reis). A resposta é $48 + 12 \times 47 = 612$.

8. a) Para construir uma função, devemos, para cada elemento de $A$, escolher sua imagem em $B$. Há 47 modos de escolher a imagem do primeiro elemento de $A$, 7 modos de escolher a imagem do segundo elemento, etc.

   A resposta é $7 \times 7 \times 7 \times 7 = 2.401$.

   b) Para a função ser injetora, elementos diferentes devem ter imagens diferentes. Há 7 modos de escolher a imagem do primeiro elemento de $A$, 6 modos de escolher a imagem do segundo elemento, etc.

   A resposta é $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$.

9. a) Como $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$, 720 possui $5 \times 3 \times 2 = 30$ divisores. Aos pares, estes divisores formam produtos iguais a 720. Logo, há 15 modos de escrever 720 como produtos de divisores.

   b) Como $144 = 2^4 \times 3^2$, 144 possui $3 \times 3 = 9$ divisores. Com eles, podem ser formados 4 pares de divisores cujo produto é 144 e, além disso, pode ser formado $12 \times 12$. Assim, há 5 modos de escrever 144 como um produto de divisores.

10. Um armário ficará aberto se ele for mexido um número ímpar de vezes. Por outro lado, o armário de ordem $k$ é mexido pelas pessoas cujos números são divisores de $k$. Logo, estarão abertos os armários cujos números possuem um número ímpar de divisores. Isto ocorre com os número cujos expoentes são todos pares na decomposição em fatores primos, ou seja, são quadrados perfeitos. Assim, permaneceram abertos os armários cujos números são quadrados perfeitos, ou seja, os números $1^2, 2^2, \dots, 30^2$.

11. Separemos o caso em que o primeiro e o terceiro quadrantes têm cores iguais do caso em que eles têm cores diferentes.

    No caso de cores iguais, há 5 modos de escolher a cor única para o primeiro e o terceiro quadrante, 4 modos de escolher a cor para o segundo quadrante e 4 modos de escolher a cor para o quarto quadrante. Há, portanto, $5 \times 4 \times 4 = 80$ modos de colorir o mapa usando cores iguais no primeiro e no terceiro quadrantes.

    No caso de cores diferentes, há 5 modos de escolher a cor para o primeiro quadrante, 4 modos de escolher a cor para o terceiro quadrante, 3 modos de escolher a cor para o segundo quadrante e 3 modos de escolher a cor para o

quarto quadrante. Há $5 \times 4 \times 3 \times 3 = 180$ modos de colorir o mapa usando cores iguais no primeiro e no terceiro quadrantes.

No total, temos, portanto, $80 + 180 = 260$ modos de colorir a figura.

12. a) Há $26^5 = 11.881.376$ palavras de 5 letras. Delas, devemos subtrair as palavras que começam por $A$, $1 \times 26^4 = 456.976$, e aquelas nas quais a letra $A$ não figura, $25^5 = 9.765.625$.

    A resposta é $11.881.376 - 456.976 - 9.765.625 = 1.658.775$.

    b) O número total de palavras de 5 letras distintas é $26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 = 7.893.600$. Delas devemos subtrair as palavras que começam por $A$, $1 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 = 303.600$ e aquelas nas quais a letra $A$ não figura, $25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 = 6.375.600$.

    A resposta é $7.893.600 - 303.600 - 6.375.600 = 1.214.400$.

    **Outra Solução:**

    Há 4 posições para colocar a letra $A$; depois disso, as quatro casas vazias podem ser preenchidas de 25, 24, 23 e 22 modos.

    A resposta é $4 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 = 1.214.400$.

13. Cada letra pode ser escolhida de 26 modos, enquanto cada algarismo pode ser escolhido de 10 modos. Logo, o número total de placas é $26^3 \times 10^4 = 175.760.000$.

14. O número de modos de acomodar os passageiros que pretendem sentar de frente é $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$; o número de modos de acomodar os passageiros que pretendem sentar de costas é $5 \times 4 \times 3 = 60$; o número de modos de acomodar os demais passageiros é $3 \times 2 \times 1 = 6$.

    A resposta é $120 \times 60 \times 6 = 43.200$.

15. Vamos primeiramente determinar quantos zeros são escritos na casa das unidades, depois na das dezenas, etc.

    Há 222 números que têm o como algarismo das unidades, pois antes do zero podem ser colocados os inteiros de 1 (inclusive) a 222 (inclusive).

    Há $22 \times 10 = 220$ números que têm 0 como algarismo nas dezenas, pois antes do zero podem ser colocados os inteiros de 1 (inclusive) a 22 (inclusive) e depois do zero, os inteiros 0 (inclusive) a 9 (inclusive).

Há $2 \times 100 = 200$ números que têm 0 como algarismo das centenas, pois antes do zero podem ser colocados os inteiros de 1 (inclusive) a 2 (inclusive) e depois do zero os inteiros de 0 (inclusive) a 99 (inclusive).

A resposta é $222 + 220 + 200 = 642$.

16. É mais simples contar, primeiramente, os números onde o algarismo 5 não aparece. O primeiro digito pode ser escolhido de 8 modos (não pode ser igual a 0 nem igual a 5) e cada um dos demais três dígitos pode ser selecionado de 9 modos (deve ser diferente de 5). Logo, há $8 \times 9^3 = 5.832$ números de a algarismos em que não aparece o algarismo 5.

    A quantidade de número de 4 dígitos, com ou sem o digito 5, é $9 \times 10^3 = 9.000$ (pois há 9 modos de selecionar o primeiro digito, que deve ser diferente de 0, e 10 modos de selecionar cada um dos demais 4 dígitos). Logo, há $9.000 - 5.832 = 3.168$ números de 4 algarismos em que o 5 não aparece.

17. Devemos decidir quantos exemplares de cada revista devem ser postos na coleção. Há 6 possibilidades para a "Veja" (0, 1, 2, 3, 4, ou 5 exemplares), 7 para a "Manchete" e 5 para a "Isto é". O número de coleções é $6 \times 7 \times 5 = 210$, e o número de coleções não-vazias é 209.

18. Em cada dia, duas das matéria são ensinadas e uma folga. Há 3 possibilidades para escolher a matéria que folga na segunda, 2 para escolher a que folga na quarta e 1 para escolher a que folga na sexta. Portanto, há 6 modos para escolher as matérias de cada dia. Para escolher os horários, há 2 possibilidades em cada dia. Logo, o número total de horários é $6 \times 8 = 48$.

19. Foi feita uma distinção artificial ao se considerar cada casal ordenado de dois modos diferentes: começando pela mulher ou pelo homem. Por esta razão, o resultado encontrado foi igual ao dobro do correto.

20. Há três tipos de cartões: os que virados de cabeça para baixo não representam números, como, por exemplo, 41.809; os que virados de cabeça para baixo representam o mesmo número, como, por exemplo, 86.198; os que virados de cabeça para baixo representam números diferentes, como, por exemplo, 66.810. Os cartões do último tipo são os que permitem economia porque um mesmo cartão serve para representar dois números. Há $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 3.125$ cartões que virados de cabeça para baixo representam número, iguais ou diferentes,

pois tais cartões devem ter como algarismos apenas 0, 1, 8, 6 ou 9. Destes, $5 \times 5 \times 3 = 75$ são do segundo tipo, pois um tal cartão deve ter as casas das extremidades preenchidas por 00, 11, 88, 69 ou 96, a segunda e a quarta casa preenchidas por 00, 11, 88, 69 ou 96, e a casa central preenchida por 0, 1 ou 8. Portanto, os cartões do terceiro tipo são em número de $3.125 - 75 = 3.050$. Podem ser economizados $3.050/2 = 1.525$ cartões. O número mínimo de cartões que se necessita é $100.000 - 1.525 = 98.475$.

21. A decomposição de 360 em fatores primos é $720 = 2^3.3^2.5$. Os divisores inteiros e positivos de 720 são números da forma $2^\alpha.3^\beta.5^\gamma$, com $\alpha \in \{0,1,2,3\}$, $\beta \in \{0,1,2\}$ e $\gamma \in \{0,1\}$. A soma dos divisores é $S = \sum 2^\alpha.3^\beta.5^\gamma$, com $\alpha \in \{0,1,2,3\}$, $\beta \in \{0,1,2\}$ e $\gamma \in \{0,1\}$. Para calcular essa soma, dividimos as parcelas em dois grupos, conforme seja $\gamma = 0$ ou $\gamma = 1$. $S = \sum(2^\alpha.3^\beta.5^0) + \sum(2^\alpha.3^\beta.5^1) = 6\sum(2^\alpha.3^\beta)$ porque a segunda soma é igual ao quíntuplo da primeira. Agora, dividimos as parcelas em grupos, conforme seja $\beta = 0$, $\beta = 1$ ou $\beta = 2$. $S = 6[\sum(2^\alpha.3^0) + \sum(2^\alpha.3^1) + \sum(2^\alpha.3^2)] = 6[\sum 2^\alpha + 3\sum 2^\alpha + 9\sum 2^\alpha] = 6[13\sum 2^\alpha] = 78\sum 2^\alpha = 78[2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3] = 78 \times 15 = 1.170$.

## Seção 4.2

1. a) O número total de anagramas $8! = 40.320$.

   b) Há 4 modos de escolher a vogal que será a primeira letra do anagrama e 3 modos de selecionar a vogal que será a última letra do anagrama. Depois disso, há 6! modos de arrumar as demais letras entre a primeira e a última.

   A resposta é $4 \times 3 \times 6! = 4 \times 3 \times 720 = 8.640$.

   c) As vogais e consoantes podem aparecer na ordem CV CV CV CV ou na ordem VC VC VC VC. No primeiro caso, devemos colocar as 4 vogais nos 4 lugares de ordem par (4! modos) e as 4 consoantes nos 4 lugares de ordem ímpar (4! modos).

   Há $4! \times 4! = 24 \times 24 = 576$ anagramas do primeiro tipo. Analogamente, há 576 anagramas do segundo tipo.

   A resposta é $576 + 576 = 1.152$.

   d) Tudo se passa como se CAP fosse uma única letra. Devemos, portanto, arrumar em fila 6 objetos: CAP,I,T,U,L,O.

   A resposta é $6! = 720$.

e) Primeiramente, devemos escolher a ordem em que as letras C, A, P aparecerão. Há 3! modos. Depois, devemos arrimar em a fila 6 objetos: o bloco de letras C, A, P e as 5 letras I, T, U, L, O. Há 6! modos.

   A resposta é $3! \times 6! = 3 \times 720 = 4320$.

f) Basta arrumar em fila, depois de PA, as restantes 6 letras.

   A resposta é $6! = 720$.

g) Há 7! anagramas com a letra P em primeiro lugar e há 7! anagramas com a letra A em segundo lugar. Há também 6! anagramas com a letra P em primeiro lugar e A em segundo lugar. Ao somarmos 7! com 7!, encontramos o número de anagramas com P em primeiro lugar ou A em segundo lugar, mas contamos duas vezes os anagramas que têm P em primeiro lugar e A em segundo lugar. A resposta é $7! + 7! - 6! = 5040 + 5040 - 720 = 9.360$.

h) Há 7! anagramas com a letra P em primeiro lugar, 7! anagramas com a letra A em segundo e 7! anagramas com a letra C em terceiro. Há também 6! anagramas com P em primeiro lugar e A em segundo lugar, 6! anagramas com P em primeiro e C em terceiro e 6! anagramas com A em segundo e C em terceiro. Finalmente, há 5! anagramas com P em primeiro lugar, A em segundo e C em terceiro.

   Ao somarmos 7! com 7! com 7!, encontramos o número de anagramas que têm P em primeiro lugar ou A em segundo ou C em terceiro, mas contamos alguns anagramas várias vezes.

   Contamos duas vezes os anagramas que têm P em primeiro lugar e A em segundo; o mesmo se deu com os que têm P em primeiro e C em terceiro e com os que têm A em segundo e C em terceiro. Descontando essas contagens indevidas, chegamos a $7! + 7! + 7! - 6! - 6! - 6! = 3.7! - 3.6!$.

   Entretanto, anagramas com P em primeiro lugar e A em segundo e C em terceiro foram, inicialmente, contados três vezes e, posteriormente, descontados três vezes, o que significa que não estão sendo contados. Incluindo-os na contagem, obtemos a resposta correta, que é $3.(7!) - 3.(6!) + 5! = 3.(5.040) - 3.(720) + 120 = 13.080$.

i) Como há 6 ordens possíveis para as letras C, A e P, os anagramas pedidos são exatamente 1/6 do total, ou seja, $8!/6 = 6.720$.

   **Outra solução:**

   Basta escolher as 3 posições a serem ocupadas pelas letras P, A, C, o que pode ser feito de $C_8^3 = 56$ modos e distribuir 5 letras restantes nas demais

posições, o que pode ser feito de $5! = 120$ modos. O total de anagramas é $56 \times 120 = 6.720$.

2. O valor de $f(a_1)$ pode ser escolhido de $n$ modos; o valor de $f(a_2)$, de $n-1$ modos; ...; o de $f(a_n)$, de 1 modo.

   A resposta é $n(n-1)\cdots 1 = n!$.

3. O número total de modos de sentar 8 pessoas em 8 cadeiras é o número de modos de arrumar 8 pessoas em fila, $8!$. O número de modos de arrumar 8 pessoas em fila de modo que duas dessas pessoas, Vera e Paulo, fiquem juntas é $2.7!$, pois, para formar uma tal fila, devemos inicialmente decidir em que ordem se colocarão Vera e Paulo e, em seguida formar uma fila de 7 objetos: o bloco formado por Vera e Paulo; as demais 6 pessoas.

   A resposta é $8! - 2.7! = 40.320 - 10.080 = 30.240$.

4. Como visto no problema anterior, o número de filas nas quais duas pessoas (neste caso Helena e Pedro) ficam juntas é $2.7! = 10.080$. O número de filas onde Helena e Pedro e também Vera e Paulo ficam juntos é obtido de modo análogo: agora são dois blocos de duas pessoas, cada um podendo ser arrumado de dois modos distintos e mais 4 pessoas. Portanto, o número de tais filas é $2.2.6! = 2.880$. Logo, o número de filas em que Helena e Pedro ficam juntos, mas Vera e Paulo não, é $10,080 \quad 2.880 = 7.200$.

5. O elemento da permutação que ocupa o 10º lugar deve ser maior que 7. Pode ser escolhido de 3 modos. O elemento da 9ª posição deve ser maior que 6; haveria 4 possibilidades, mas uma delas já foi usada na escolha do elemento que ocupa a 10ª posição. Pode ser escolhido de 3 modos. Prosseguindo com esse raciocínio, vemos que a cada nova casa abranda-se a restrição, criando uma possibilidade a mais, mas ao mesmo tempo diminui-se uma possibilidade, pois uma delas foi usada na etapa. Ou seja, há 3 possibilidades para cada casa até a 3ª casa. O elemento da 3ª posição deve ser maior que $3 - 3 = 0$; haverá 10 possibilidades, mas 7 delas já foram usadas nas etapas anteriores. Pode ser escolhido de $10 - 7 = 3$ modos. O elemento da 2ª posição deve ser maior que $2 - 3 = -1$; haveria 10 possibilidades mas 8 já foram usadas nas etapas anteriores. Pode ser escolhido de $10 - 8 = 2$ modos. Finalmente, o elemento de posição 1 deve ser maior que $1 - 3 = -2$; haveria 10 possibilidades, mas 9

delas já foram usadas nas etapas anteriores. Pode ser escolhido de 10 9 = 1 modo.

A resposta é $3^8.2.1 = 13.122$.

6. Há $C_{15}^5$ modos de formar o Esporte; depois disso, $C_{10}^5$ modos de formar o Tupi; finalmente, 1 único modo de formar o Minas.

   A resposta é $C_{15}^5 \times C_{10}^5 \times 1 = 756.756$.

7. O número de possibilidades é igual ao número obtido no problema anterior dividido por $3! = 6$, já que permutando os nomes dos times a subdivisão continua a mesma. A resposta é $756.745/6 = 126.126$.

8. Escolha, sucessivamente, 3 pessoas para formar os 4 grupos de 3; isto pode ser feito, sucessivamente, de $C_{20}^3$, $C_{17}^3$, $C_{14}^3$ e $C_{11}^3$ modos. A seguir, com as 8 pessoas restantes for os 2 grupos restantes, o que pode ser feito de $C_8^4$ e $C_4^4$ modos, respectivamente. Fazendo isso, contamos cada divisão 4!.2! vezes, porque, quando formamos os mesmos grupos de 3 e os mesmos grupos de 4 em outra ordem, contamos como se fosse outra divisão em grupos.

   A resposta é $\dfrac{C_{20}^3.C_{17}^3.C_{14}^3.C_1^3.C_8^4.C_4^4}{4!.3!} = \dfrac{20!}{(3!)^4(4!)^2 4!2!} = 67.897.830.000$.

   **Outra solução:**

   Forme uma fila com 20 pessoas. Isso automaticamente as divide em 4 grupos de 3 e 2 grupo de 4: as 3 primeiras formam um grupo, as 3 seguintes formam outro etc.. Há 20! modos de formar a fila. Entretanto, uma mesma divisão em grupos correspondentes a várias filas diferentes, o que faz com que, no resultado 20!, cada divisão tenha sido contada várias vezes. Devemos corrigir nossa contagem dividendo o resultado pelo número de vezes que cada divisão foi contada. Trocando a ordem dos elementos em cada grupo, o que pode ser feito de 3!.3!.3!.3!.4!.4! modos, ou a ordem dos grupos, o que pode ser feito de 4!.2! modos, a divisão em grupos não se altera, mas a fila sim. Cada divisão foi, assim, contada $(6!)^3.2!.3!$ vezes e a resposta é $\dfrac{20!}{(3!)^4(4!)^2 4!2!}$

9. Os adversários em cada jogo podem ser escolhidos, sucessivamente, de $C_{12}^2$, $C_{10}^2$, $C_8^2$, $C_6^2$, $C_4^2$ e $C_2^2$ modos. No entanto, assim contamos cada possível rodada 6! vezes, já que contamos diferentes ordens dos jogos como se fossem rodadas diferentes. A resposta é $\dfrac{C_{12}^2.C_{10}^2.C_8^2.C_6^2.C_4^2.C_2^2}{6!} = \dfrac{12!}{2^6.6!} = 10.395$

**Outra solução:**

Colocados os 12 times em fila automaticamente formamos os 6 jogos da rodada. No entanto, a mesma rodada é contada várias vezes; os adversários em cada jogo podem ser ordenados de 2 modos, enquanto os jogos podem ser ordenados de 6! modos. A resposta é, portanto, $\frac{12!}{2^6.6!}$.

10. a) Para determinar o lugar ocupado pelo número 62.417, devemos contar quantos números estão antes dele. Antes dele estão os números começados por:

   i) 1 (4!=24 números)
   ii) 2(4!=24 números)
   iii) 4 (4!=24 números)
   iv) 61 (3!=6 números)
   v) 621 (4!=2 números)

   Há $24 + 24 + 24 + 6 + 2 = 80$ números antes do 62.417.

   A resposta é 81º

b) Como há $4! = 24$ números começados por 1, e $4! = 24$ números começados por 2 e $3! = 6$ números começados por 41, e $3! = 6$ números começados por 42, e $3! = 6$ números começados por 46, o 66º número escrito é o último dos números começados por 46, ou seja, 46.721.

   A resposta é 46721.

c) Como há 5 algarismos em cada número, o 166º algarismo escrito é o primeiro algarismo do 36º número.

   Como há $4! = 24$ números começados por 1, e $3! = 6$ números começados por 21, e $3! = 6$ números começados por 24, o 36º número escrito é o último dos números começados por 26. Logo, seu primeiro algarismo é 2.

d) Nas casas das unidades desses números, aparecem apenas os algarismos 1, 2, 4, 6, 7, cada um deles $4! = 24$ vezes. A soma das unidades desses números é, portanto, $(1 + 2 + 4 + 6 + 7).24 = 480$ unidades, ou seja, 480. A soma das dezenas é, analogamente, igual a 480 dezenas, ou seja, 4.800. A soma das centenas é igual a 480 centenas, ou seja, 48.000. A soma das unidades de milhar é igual a 480 unidades de milhar, ou seja, 480.000. Finalmente, a soma das dezenas de milhar é igual a 480 dezenas de milhar,

ou seja, 4.800.000. A resposta é 480+4.800+48.000+480.000+4.800.000 = 5.333.280.

**Outra Solução:**

Há 5! = 120 parcelas na soma. Podemos agrupá-las em 60 pares, juntando a cada número o que dele se obtém trocando o 1 com o 7, trocando o 2 com o 6, e conservando a posição do 4. Em cada par, a soma vale 88.888. A resposta é 88.888 × 60 = 5.333.280

11. Devemos inicialmente escolher a ordem em que as moça ficarão juntas, o que pode ser feito de $m!$ maneiras. Em seguida, devemos arrumar em fila $r+1$ objetos, os $r$ rapazes e o bloco das moças, o que pode ser feito de $(r+1)!$ modos.

    A resposta é $m!(r+1)!$.

12. a) A face a receber o número 1 pode ser escolhida de 6 modos, a do número 2 de 5 modos, e assim por diante. O número de possibilidades é 6.5.4.3.2.1 = 720.

    b) Inicialmente, fazemos a conta que as faces tem cores diferentes. Contamos, pelo problema anterior, 720 dados. Como as faces são indistinguíveis, o mesmo dado foi contado várias vezes. Por exemplo, pense em um dado que tenha o 6 na face de baixo (face preta) e o 1 na face de cima (face branca). Ele é, certamente, diferente de um dado que tenha o 1 na face de baixo (face preta) e o 6 na face de cima (face branca). Mas sendo as faces indistinguíveis, o dado que tem 6 na face de baixo e o 1 na face de cima é igual ao dado que tem o 1 na face de baixo e o 6 na face de cima; este é, simplesmente, aquele de cabeça para baixo. Esse mesmo dado aparece outra vez com o 1 na face da frente e o 6 na face de trás, com o 1 na face da esquerda e o 6 na face da direita, etc. Em suma, o mesmo dado foi contado tantas vezes quantas são as posições de colocá-lo.

    O número de posições de colocar um cubo é $6 \times 4 = 24$, pois há 6 modos de escolher a face de baixo e 4 de escolher, nessa face, o lado que fica de frente.

    A resposta é $\frac{720}{24} = 30$.

    **Outra solução:**

    Todo dado pode ser imaginado com a face 1 embaixo. Realmente, se o 1 não estiver embaixo, é possível rodar o dado de modo que o 1 vá para baixo.

Fixando o 1 embaixo, devemos escolher quem ocupará a face oposta à face do 1. Isso pode ser feito de 5 modos. Digamos que tenha sido escolhido o 6. Com o 1 fixo embaixo e o 6 fixo em cima, devemos colocar os números 2, 3, 4 e 5 nas faces laterais. O 2 sempre pode ser imaginado na face da frente. Com efeito, se o 2 não estiver na face da frente, uma conveniente rotação colocá-lo-á na face da frente, sem tirar o 1 da face de baixo nem o 6 da face de cima. Fixamos o 2 na frente, o 1 embaixo e o 6 em cima, devemos escolher quem ocupará a face oposta à face do 2. Isso pode ser feito de 3 modos. Digamos que tenha sido escolhido o 4. Agora, devemos colocar o 3 e o 5 nas faces da direita e da esquerda. Note que qualquer movimento com o dado ou retirará o 1 de baixo, ou o 6 de cima, ou o 2 da frente, ou o 4 de trás, Portanto, há 2 modos de preencher as faces direita e esquerda com os números 3 e 5.

A resposta é $5 \times 3 \times 2 = 30$.

c) Um dado com faces de cores diferentes pode, agora, ser numerado de apenas $6.4.2 = 48$ modos, já que temos 6 faces a escolher para o número 1 (isto determina a face do número 6), a para o número 2 (o que determina a face do 5) e 2 para o número 3 (que determina a do 4). Mas como as faces são iguais, cada dado é contado, como no ítem anterior, 24 vezes. Logo há apenas $48/24 = 2$ dados distintos.

**Outra Solução:**

Como antes, podemos fixar o dado com o número 1 embaixo. Agora, no entanto, isto também fixa o número 6 na frente de cima. Agora, o número 2 pode ser fixado na face da frente (e, portanto, o número 5 na de trás). Assim, tudo que temos a escolher é se a face lateral da direita é 3 ou o 4. Temos, portanto, apenas duas possibilidades.

13. a) O número de posições para um tetraedro $4 \times 3 = 12$, pois há 4 modos de escolher a face de apoio e 4 de escolher, nessa face, o lado que fica de frente.

A resposta é $\dfrac{4!}{12} = 2$.

b) O número de posições para um octaedro regular é $6 \times 4 = 24$, pois há e modos de escolher o vértice de apoio e 4 de escolher, dentre as arestas que incidem nesse vértice, a que fica de frente.

A resposta é $\dfrac{8!}{24} = 1.680$.

c) O número de posições para um dodecaedro regular é $12 \times 5 = 60$, pois há 12 modos de escolher a face de apoio e 5 de escolher, nessa face, o lado que fica de frente.
A resposta é $\frac{12!}{60} = 7.938.360$.

d) O número de posições para um icosaedro regular é $20 \times 3 = 60$, pois há 20 modos de escolher a face de apoio e 3 de escolher, nessa face, o lado que fica de frente.
A resposta é $\frac{20!}{60} = 40.548.366.802.944.000 \cong 4.10^{16}$.

14. Temos $1! = 1$, que é um quadrado perfeito, $1! + 2! = 1 + 2 = 3$, que não é quadrado perfeito, $1! + 2! + 3! = 1 + 2 + 6 = 9$, que novamente é quadrado perfeito, $1!+2!+3!+4! = 1+2+6+24 = 33$, que não é quadrado perfeito. Todos os fatorais seguintes, a partir de 5! terminam com zero, já que são múltiplos de 5 e 2. Logo, todas as somas da forma $\sum_1^n k!$ para $n \geq 5$ terminam com o algarismo 3 e não são, portanto, quadrados perfeitos. As únicas soluções são $n = 1$ e $n = 3$.

15. Em ESTRELADA as letras A e E aparecem 2 vezes cada e as letras S, T, R, L e D aparecem uma vez cada uma, havendo, portanto, 9 letras na palavra.

Para formar um anagrama, devemos escolher 2 das 9 posições para colocar as letras A, o que pode ser feito de $C_9^2$ modos, 2 das 7 posições restantes para colocar as letras E, o que pode ser feito de $C_7^2$ modos, e arrumar as letras S, T, R, L e D nas 5 posições restantes, o que pode ser feito de 5! modos. A resposta é $C_9^2.C_7^2.5! = 90.720$.

**Outra solução:**

O número de anagramas é $P_9^{2,2,1,1,1,1,1} = \frac{9!}{2!2!1!1!1!1!1!} = 90.720$.

16. Formar uma solução com $p$ elementos significa escolher $p$ dos $n$ elementos. A resposta é $C_n^p$.

17. Basta escolher as provas do primeiro dia, o que pode ser feito de $C_8^4 = 70$ modos.

18. O processo de contagem apresentado conta determinadas comissões mais de uma vez. Isto ocorre porque um homem que participe da comissão pode ser

inserido de dois modos diferentes: como um dos 3 homens escolhidos dos inicialmente, ou como uma das duas pessoas escolhidas posteriormente. O pior é que não é possível "corrigir" a contagem dividendo pelo número de vezes que cada comissão é contada: as comissões com 3 homens são contadas apenas uma vez, as que têm 4 homens são contadas 4 vezes, enquanto a que contém 5 homens é contada 10 vezes.

A solução correta é dada no Exemplo 6, contando separadamente as comissões com 3, 4 e 5 homens: $C_5^3.C_4^2 + C_5^4.C_4^1 + C_5^5 = 81$.

19. Os segmentos que unem dos vértices de um poliedro ou são arestas ou são diagonais de faces ou diagonais do poliedro.

    a) O octaedro regular é um poliedro formado por 8 faces triangulares e que tem 6 vértices e 12 arestas. Há $C_6^2 = 15$ segmentos que unem dois vértices do poliedro, pois 12 dos quais são arestas e 0 dos quais é diagonal de face.
    A resposta é $15 - 12 - 0 = 3$.

    b) O icisaedro regular é um poliedro formado por 20 faces triangulares e que tem 12 vértices e 30 arestas. Há $C_{12}^2 = 66$ segmentos que unem dois vértices do poliedro, 30 dos quais são arestas e 0 dos quais é diagonal de face.
    A resposta é $66 - 30 - 0 = 36$.

    c) O dodecaedro regular é um poliedro formado por 12 faces pentagonais e que tem 20 vértices e 30 arestas. Há $C_{20}^2 = 190$ segmentos que unem dois vértices do poliedro, 30 dos quais são arestas e $12\frac{5(5-3)}{2} = 60$ dos quais são diagonais de faces.
    A resposta é $190 - 30 - 60 = 100$.

    d) O cubo é um poliedro formado por 6 faces quadradas e que tem 8 vértices e 12 arestas. Há $C_8^2 = 28$ segmentos que unem os vértices do poliedro, 12 dos quais são arestas e $6\frac{4(4-3)}{2}12$ dos quais são diagonais de faces.
    A resposta é $28 - 12 - 12 = 4$.

    **Outra solução:**

    Cada diagonal de um prisma $n$-agonal une um vértice da base "de cima" a um vértice da base "de baixo". O vértice da base "de cima" pode ser selecionado de $n$ modos; depois disso, o da base "de baixo" pode ser selecionado de $n - 3$ modos, pois um dos vértices da base "de baixo", se selecionado

daria origem a uma aresta e os dois vértices adjacentes nesta base dariam origem a diagonais das faces laterais. O número de diagonais de um prisma $n$-agonal é portanto, $n(n-3)$.

Como o cubo é um prisma quadrangular, a resposta é $4(4-3) = 4$.

e) O prisma hexagonal é um poliedro formado por 6 faces quadrangulares e 2 faces hexagonais e que tem 12 vértices e 18 arestas. Há $C_{12}^2 = 66$ segmentos que unem os vértices do poliedro, 18 dos quais são arestas e $6\frac{4(4-3)}{2} + 2\frac{6(6-3)}{2} = 30$ dois quais são diagonais de faces.

A resposta é $66 - 18 - 30 = 18$.

**Outra solução:**

O número de diagonais de um prisma $n$-agonal é, como visto em d), $n(n-3)$. Portanto, o número de diagonais de um prisma hexagonal é $6(6-3) = 18$.

20. Uma função estritamente crescente é necessariamente injetiva (se $f(a) = f(b)$, não pode ser $a < b$, pois, neste caso, $f(a) < f(b)$, o que é absurdo; do mesmo modo, não pode ser $a > b$, pois, neste caso, $f(a) > f(b)$, o que é absurdo; logo, $a = b$), Logo, seu conjunto de valores terá exatamente $m$ elementos. Para construir uma tal função, devemos, inicialmente selecionar o conjunto de valores, o que pode ser feito de $C_n^m$ modos.

Selecionando o conjunto de valores, a função está determinada porque $f(1)$ deve ser igual ao menor elemento do conjunto de valores, $f(2)$ deve ser igual ao segundo menor elemento do conjunto de valores, etc.

A resposta é, portanto, $C_n^m$.

21. Vamos esquecer que a primeira casa do número não pode ser igual a zero. Isso fará com que contemos a mais e, depois, descontaremos o que foi contado indevidamente.

Há $C_7^3$ modos de escolher as casas que serão ocupadas pelo digito 4; depois disso, há $C_4^2$ modos de selecionar as casas que serão ocupadas pelo digito 8; finalmente, as duas casas restantes podem ser preenchidas de $8 \times 8$ modos (não podemos usar nessas casas os dígitos 4 e 8).

A "resposta" seria $C_7^3 \times C_4^2 \times 8 \times 8 = 35 \times 6 \times 64 = 13.440$.

Devemos subtrair os números começados por zero. Se o número começa por 0, há $C_6^3$ modos de escolher as casas que serão ocupadas pelo digito 4; depois

disso, há $C_3^2$ modos de selecionar as casas que serão ocupadas pelo digito 8; finalmente, a casa restante pode ser preenchida de 8 modos (não podemos usar nessa casa os dígitos 4 e 8). Há $C_6^3 \times C_3^2 \times 8 = 20 \times 3 \times 8 = 480$ números começados por 0.

A resposta é 13.440 − 480 = 12.960

**Outra solução:**

Vamos a contar separadamente:

i) números que começam com 4; ii) números que começam com 8; iii) números que não começam nem com 4 nem com 8.

i) Há 1 modo de preencher a primeira casa; depois disso, há $C_6^2$ modos de escolher as outras duas casas do número que também serão preenchidas com o algarismo 4; depois disso, há $C_4^2$ modos de escolher as duas casas que serão ocupadas pelo algarismo 8; finalmente, as duas casas restantes podem ser preenchidas de $8 \times 8$ modos (não podemos usar nessas casas os dígitos 4 e 8).
Há $1 \times C_6^2 \times C_4^2 \times 8 \times 8 = 1 \times 15 \times 6 \times 64 = 5.760$ números do tipo i).

ii) Há 1 modo de preencher a primeira casa; depois disso, há 6 modos de escolher a outra casa do número que também será preenchida com o algarismo 8; depois disso, há $C_5^3$ modos de escolher as três casa que serão ocupadas pelo algarismo 4; finalmente, as duas casas restantes podem ser preenchidas de $8 \times 8$ modos (não podemos usar nessas casas os dígitos 4 e 8).
Há $1 \times 6 \times C_5^3 \times 8 \times 8 = 6 \times 10 \times 64 = 3840$ números do tipo ii).

iii) Há 7 modos de preencher a primeira casa (não podemos usar nem 4, nem 8, nem 0); depois disso, há $C_6^3$ modos de escolher as três casas do número que serão preenchidas com o algarismo 4; depois disso. há $C_3^2$ modos de escolher as duas casas que serão ocupadas pelo algarismo 8; finalmente, a casa restante pode ser preenchida de 8 modos (não podemos usar nessas casa os dígitos 4 e 8).
Há $7 \times C_6^3 \times C_3^2 \times 8 = 7 \times 20 \times 3 \times 8 = 3.360$ números de tipo iii).
A resposta é $5.760 + 3.840 + 3.360 = 12.960$.

22. a) Para formar o subconjunto devemos escolher $p - 1$ outros elementos do subconjunto dentre os $n$ 1 outros elemento do conjunto.

A resposta é $C_{n-1}^{p-1}$.

b) Para formar o subconjunto devemos escolher os $p$ elementos do subconjunto dentre os $n-1$ outros elementos do conjunto.

A resposta é $C_{n-1}^{p}$.

**Outra solução:**

Há $C_n^p$ $p$-subconjuntos e o elemento $a_1$ figura em $C_{n-1}^{p-1}$ deles. Logo, há $C_n^p - C_{n-1}^{p-1}$ subconjuntos nos quais o elemento $a_1$ não figura.

A resposta é $C_n^p - C_{n-1}^{p-1}$.

**Observação:** As duas soluções apresentadas mostram que $C_n^p - C_{n-1}^{p-1} = C_{n-1}^{p}$. Essa é a famosa Relação de Stifel.

c) Para formar o subconjunto devemos escolher os $p-2$ outros elementos do subconjunto dentre os $n-2$ outros elementos do conjunto.

A resposta é $C_{n-2}^{p-2}$.

d) O total de $p$-subconjuntos é $C_n^p$. Para formar um subconjunto em que nem $a_1$ nem $a_2$ figurem devemos escolher os $p$ elementos do subconjuntos dentre os $n-2$ outros elementos do conjunto. Há, portanto, $C_{n-2}^{p}$ subconjuntos nos quais nem $a_1$ nem $a_2$ figuram. Logo, o número de subconjuntos nos quais pelo menos um desses dois elementos figura é $C_n^p - C_{n-2}^{p}$.

**Outra solução:**

Há $C_{n-1}^{p-1}$ $p$-subconjuntos nos quais o elemento $a_1$ figura e há $C_{n-1}^{p-1}$ subconjuntos nos quais o elemento $a_2$ figura. Há, também, $C_{n-2}^{p-2}$ $p$-subconjuntos nos quais os elementos $a_1$ e $a_2$ figuram ambos. Ao somarmos $C_{n-1}^{p-1}+C_{n-1}^{p-1} = 2C_{n-1}^{p-1}$ obtemos o número de subconjuntos nos quais pelo menos um dos elementos $a_1$ e $a_2$ figura, mas contamos duas vezes aqueles que $a_1$ e $a_2$ figuram ambos.

A resposta é, portanto, $2C_{n-1}^{p-1} \quad C_{n-2}^{p-2}$.

**Outra solução:**

Há, como mostrado em c), $C_{n-2}^{p-2}$ $p$-subconjuntos em que os elemento $a_1$ e $a_2$ figuram ambos.

Há $C_{n-2}^{p-1}$ $p$-subconjuntos em que o elemento $a_1$ figura e o elemento $a_2$ não figura, pois, para formar um tal subconjunto, basta escolher os outros $p-1$ elementos do subconjunto dentre os $n-2$ elementos do conjunto que são diferentes de $a_1$ e de $a_2$.

Há analogamente, $C_{n-2}^{p-1}$ $p$-subconjuntos em que o elemento $a_2$ figura e o elemento $a_1$ não figura. Portanto, o número de $p$-subconjuntos em que figura pelo menos um desses dois elementos é $2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$.

e) Como visto na solução anterior, a resposta é $2C_{n-2}^{p-1}$.

**Outra solução:**

Há, como visto em d). $2C_{n-1}^{p-1} \quad C_{n-2}^{p-2}$ $p$-subconjuntos nos quais pelo menos um dos elementos $a_1$ e $a_2$ figura. Há, como visto em c), $C_{n-2}^{p-2}$ $p$-subconjuntos em que os elementos $a_1$ e $a_2$ figuram ambos.

A resposta é, portanto, $2C_{n-1}^{p-1} - C_{n-2}^{p-2} - C_{n-2}^{p-2} = 2C_{n-1}^{p-1} - 2C_{n-2}^{p-2}$.

**Outra solução:**

Há como visto em d), $2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$ $p$-subconjuntos nos quais pelo menos um dos elementos $a_1$ e $a_2$ figura. Há, como visto em c), $C_{n-2}^{p-2}$ $p$-subconjuntos em que os elementos $a_1$ e $a_2$ figuram ambos.

A resposta é, portanto, $2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2} - C_{n-2}^{p-2} = 2C_{n-2}^{p-1}$.

23. a) Como há 32 cartas, a resposta $C_{32}^{2} = 201.376$.

b) Há 8 modos de escolher o grupo do par propriamente dito (por exemplo, valete), $C_4^2$ modos de escolher os naipes das duas cartas do par (por exemplo, copas e paus), $C_7^3$ modos de escolher os grupos das outras três cartas (por exemplo, 10, 8 e rei) e $4 \times 4 \times 4 = 4^3$ modos de escolher os naipes dessas três cartas.

A resposta é $8 \times C_4^2 \times C_7^3 \times 4^3 = 107.520$.

c) Há $C_8^2$ modos de escolher os grupos das cartas que formarão os dois pares, $(C_4^2)^2$ modos de escolher seus naipes, 6 modos de escolher o grupo da outra carta e 4 modos de escolher seu naipe.

A resposta é $C_8^2 \times (C_4^2)^2 \times 6 \times 4 = 24.192$.

**Observação:** Um erro muito comum é o exposto a seguir.

Há 8 modos de escolher o grupo do primeiro par, $C_4^2$ modos de escolher os naipes do primeiro par, 7 modos de escolher o grupo do segundo par, $C_4^2$ modos de escolher os naipes do segundo par, 6 modos de escolher o grupo da outra carta e 4 modos de escolher seu naipe. A resposta ERRADA seria $8 \times C_4^2 \times 7 \times C_4^2 \times 6 \times 4 = 48.384$. A explicação do ERRO é simples: Ao fazermos a inexistente distinção entre primeiro par e segundo par, contamos pares de valetes e reis como diferentes de pares de reis e valetes.

A resposta ERRADA pode ser corrigida dividindo-a por 2.

d) Há 8 modos de escolher o grupo da trinca, $C_4^3$ modos de escolher os naipes das cartas da trinca, $C_7^2$ modos de escolher os grupos das outras duas cartas e $4 \times 4 = 4^2$ modos de escolher os naipes dessas duas cartas.

A resposta é $8 \times C_4^3 \times C_7^2 \times 4^2 = 10.752$

e) Há 8 modos de escolher o grupo do "four", 1 modo de escolher os naipes das quatro cartas do "four", 7 modos de escolher o grupo da outra carta e 4 modos de escolher o naipe dessa carta.

A resposta é $8 \times 1 \times 7 \times 4 = 224$.

f) Há 8 modos de escolher o grupo da trinca, $C_4^3$ modos de escolher os naipes das cartas da trinca, 7 modos de escolher o grupo do par e $C_4^2$ modos de escolher os naipes das cartas do par.

A resposta é $8 \times C_4^3 \times 7 \times C_4^2 = 1.344$

g) Há apenas 4 tipos de seqüencias: 7. 8. 9. 10, valete, dama, rei; 10, valete, dama, rei, ás. Escolhido o tipo da seqüencia, haveria $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5$ modos de escolher os naipes das cartas das seqüencias, mas 4 desses modos não são permitidos: todas de ouros, todas de paus, todas de copas e todas de espadas.

A resposta é $4 \times [4^5 - 4] = 4.080$.

h) Os grupos das cartas podem ser escolhidos de $C_8^5 - 4$ modos e o naipe único, de 4 modos.

A resposta é $(C_8^5 - 4) \times 4 = 208$.

i) Há 4 modos de escolher os grupos de cartas e 4 modos de escolher o naipe único.

A resposta é $4 \times 4 = 16$.

j) Há 4 modos de escolher o naipe único. A resposta é 4.

24. a) Neste caso $f$ é bijetiva e, se $\#A = \#B = n$, o número de funções $f : A \to B$ bijetivas é $n!$, como foi mostrado no exercício 4 da seção 2.2.

b) Neste caso dois elementos de $A$ terão uma mesma imagem em $B$ e a correspondência entre os demais $n-1$ elementos de $A$ e os demais $n-1$ elementos de $B$ será bijetiva.

Há $\binom{n+1}{2}$ modos de escolher os dois elementos de $A$, $n$ modos de escolher a imagem deles em $B$ e $(n-1)!$ modos de construir uma correspondência bijetiva entre os elementos restantes.

A resposta é $\binom{n+1}{2} \cdot n \cdot (n-1)! = \dfrac{n(n+1)!}{2}$

c) Neste caso temos as alternativas

i) Três elementos de $A$ têm a mesma imagem em $B$ e a correspondência entre os demais $n-1$ elementos de $A$ e os demais $n-1$ de $B$ é bijetiva. Há $\binom{n+2}{3}$ modos de escolher os três elementos de $A$, $n$ modos de escolher a imagem deles em $B$ e $(n-1)!$ modos de construir uma correspondência bijetiva entre os elementos restantes.
Há $\binom{n+2}{3} \cdot n \cdot (n-1)! = \dfrac{n(n+2)!}{6}$ funções desse tipo.

ii) Há dois pares de elementos de $A$ com imagens idênticas em $B$ e a correspondência entre os demais $n-2$ elementos de $A$ e os demais $n-2$ elementos de $B$ é bijetiva.
Há $\binom{n}{2}$ modos de escolher os dois elementos de $B$, $\binom{n+2}{2} \times \binom{n}{2}$ modos de escolher suas imagens inversas em $A$ e $(n-2)!$ modos de estabelecer a correspondência entre os elementos restantes.
Há $\binom{n}{2} \times \binom{n+2}{2} \times \binom{n}{2} \times (n-2)! = \dfrac{n(n-1)(n+2)!}{8}$ funções desse tipo.
A resposta é:

$$\frac{n(n+2)!}{6} + \frac{n(n-1)(n+2)!}{8} = \frac{n(3n+1)(n+2)!}{24}.$$

25. Chamemos de $D$ o conjunto $C - C_1$.

Há quatro tipos de planos:

i) determinados por três pontos de $D$;

ii) determinados por dois pontos de $D$ e um de $C_1$;

iii) determinados por um ponto de $D$ e dois de $C_1$;

iv) determinados por três pontos de $C_1$.

A resposta é $C_{12}^3 + C_{12}^2.8 + 12.C_8^2 + 1 = 1.085$

**Outra solução:**

Para determinar um plano, devemos selecionar 3 dos 20 pontos, o que pode ser feito de $C_{20}^3 = 1140$ modos. Nessa contagem, o plano que contém os 8 pontos de $C_1$ foi contado $C_8^3 = 56$ vezes.

A resposta é $1.140 - 56 + 1 = 1.085$.

26. Escolhida a ordem de cada casal, o que pode ser feito de $2^3$ modos, temos que arrumar em fila 4 espaços vazios e 3 casais, o que pode ser feito de $C_7^4$ modos (escolha dos espaços vazios) vezes 3! (colocação dos 3 casais nos 3 lugares restantes).

    A resposta é $2^3 \times C_7^4 \times 3! = 1.680$.

27. Primeiro, colocamos as vogais. Como a letra A aparece 3 vezes e as letras U, I e O aparecem 1 vez cada, o número de modos de dispô-las é $P_6^{3,1,1,1} = \frac{6!}{3!} = \frac{720}{6} = 120$. A seguir, colocamos as consoantes em três dos 7 espaços antes, entre e depois das vogais. O lugar do P pode ser qualquer um destes 7 espaços, o do R qualquer dos 6 restantes e o do G qualquer dos 5 restantes. O número total de possibilidades é 120.7.6.5 = 25.200.

28. Vamos a formar uma fila com os números $1, 2, \ldots, n$ e assinalar com E os $p$ números escolhidas e com N os $n-p$ não escolhidos. A condição para que não sejam escolhidos números consecutivos é que entre dois E haja pelo menos um N. Começamos escrevendo os $n-p$ E. A seguir, devemos escolher, para colocar os E, $p$ dentre os $n-p+1$ espaços situados antes, entre e depois dos N. Isto pode ser feito de $C_{n-p+1}^p$ modos.

29. Chegam 4 cientistas A, B, C, D. Com as chaves que possuem, abrem alguns cadeados, mas não todos. Existe pelo menos um cadeado que eles não conseguem abrir. Na situação do número mínimo de cadeados, existe exatamente um cadeado que eles não conseguem abrir. Batize tal cadeado de ABCD. Portanto, ABCD é p cadeado cuja chave não está em poder de A, nem de B, nem de C e nem de D. Qualquer outro cientista tem a chave desse cadeado, pois esse cientista e A, B, C e D formam um grupo de 5 cientistas e, portanto, nesse grupo alguém possui a chave. Como o alguém não é nem A, nem B, nem C e nem D, deve ser o outro. Analogamente batize os demais cadeados. Verifique agora que a correspondência entre cadeados e seus nomes é biunívoca, isto é, cadeados diferentes têm nomes diferentes (isso porque estamos na situação do número mínimo de cadeados) e cadeados de nomes diferentes são diferentes (se X está no nome de um cadeado e não está no nome de outro, X tem a chave deste e não tem a chave daquele).

    a) O número mínimo de cadeados é igual ao número de nomes de cadeados, $C_{11}^4 = 330$.

b) Cada cientista X possui as chaves dos cadeados que não possuem X no nome, $C_{10}^4 = 210$.

30. Nenhum aluno pode comparecer a mais de três jantares. Com efeito, se $A_1$ vai a um jantar com $A_2$ e $A_3$, ele só pode ir a outro jantar com outros dois estudantes, digamos $A_4$ e $A_5$ e só poder ir a um terceiro jantar em companhia de outros dois, digamos $A_6$ e $A_7$ e não terá companhia para ir a um quarto jantar. Como há 21 convites e são 7 estudantes, cada estudante terá que compadecer a exatamente 3 jantares.

    Se $A_1$ comparece a três jantares, podemos escolher os seus companheiros dividindo os outros 6 estudantes em 3 grupos de 2, o que pode ser feito de $\frac{C_6^2 \times C_4^2 \times 1}{3!} = 15$ modos.
    Então, os 3 jantares são, digamos, $A_1A_2A_3$, $A_1A_4A_5$, $A_1A_6A_7$.

    $A_2$ deverá comparecer a mais dos jantares, nenhum deles em companhia de $A_3$, e $A_3$ também deverá comparecer a mais dois jantares. Portanto, os 4 jantares que faltam são:

    $A_2$__, $A_2$__, $A_3$__, $A_3$__

    Como $A_4$ deve compareces a mais dois jantares ($A_4$ não pode compareces a ambos em companhia de $A_2$ nem a ambos em companhia de $A_3$), esses quatro jantares são:

    $A_2A_4$_, $A_2$__, $A_3A_4$_, $A_3$__;

    $A_5$ tem que comparecer ainda a dois jantares, nenhum deles em companhia de $A_4$.

    $A_2A_4$_, $A_2A_5$_, $A_3A_4$_, $A_3A_5$_.

    Agora há duas possibilidades:

    $A_2A_4A_6$, $A_2A_5A_7$, $A_3A_4A_7$, $A_3A_5A_6$ e

    $A_2A_4A_7$, $A_2A_5A_6$, $A_3A_4A_6$, $A_3A_5A_7$.

    Há portanto $15 \times 2 = 30$ maneiras de escolher os grupos de convidado. Para distribuir os 7 grupos nos 7 dias, há 7! alternativas.

    A resposta é $7! \times 30 = 151.200$.

31. Os dois primeiros lugares só podem ser ocupados por elementos de $\{a_1, a_2, \ldots, a_7\}$ e os dois últimos por exemplo de $\{a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}$.

A resposta é $C_7^2 \times C_4^2 = 126$.

32. Há $C_{m+h}^m \times 1$ modos de escolher os lugares para os homens. Feito isso, só há 1 modo de formar a fila.

    A resposta é $C_{m+h}^m \times 1 = C_{m+h}^m$.

33. a) Cada professor fica caracterizado pelas duas bancas a que pertence. O número de professores é igual ao número de modos de escolher duas das oito bancas.

    A resposta é $C_8^2 = 28$.

    b) O número de professores pertencentes a uma banda é igual ao número de modos de escolher a outra banca a que ele pertence.

    A resposta é 7.

34. a) Imagine um quadro em que cada linha é relação dos atletas de um time. O número de elementos do quadro é o número de times, $t$, multiplicado pelo tamanho de cada time, $k$, e é também igual ao número de atletas, $a$, multiplicado pelo número de times de que a cada atleta participa, $x$.
    Logo, $ax = tk$ e $x = \frac{tk}{a}$.

    b) No mesmo quadro, o número de pares de atletas na mesma linha é igual ao número de linhas, $t$, multiplicado pelo número de pares de atletas em uma linha, $C_k^2$, e é também igual ao número de pares de atletas, $C_a^2$, multiplicado pelo número de times em que cada par de atletas fica junto, $y$.
    Logo, $yC_a^2 = tC_k^2$ e $y = \frac{tC_k^2}{C_a^2} = \frac{tk(k-1)}{a(a-1)}$.

35. A resposta é o número de permutações circulares de 4 elementos, ou seja, $3! = 6$.

36. Há $(PC)_5 = 4!$ modos de formar uma roda com as meninas. Depois disso, os 5 meninos devem ser postos nos 5 lugares entre as meninas, o que pode ser feito de 5! modos. A resposta é $4! \times 5! = 24 \times 120 = 2.880$.

37. É mas simples calcular o número total de rodas e excluir aquelas em que Vera e Isadora ficam juntas. O número total de rodas é $PC_6 = 5! = 120$. Para formar as rodas em que Vera e Isadora se colocarão na roda. Há 2 possibilidades: Vera-Isadora e Isadora-Vera. Agora tudo se passa como se Vera e Isadora fossem uma única criança. Assim, há $2(PC)_5 = 2.4! = 48$ rodas em que Vera e Isadora ficam juntas. A resposta é $120 - 48 = 72$ rodas.

38. Chamando $x$ de $1+a$, $y$ de $1+b$ e $z$ de $1+c$, o problema se transforma em encontrar todas as soluções inteiras e não-negativas de $(a+1)+(b+1)+(c+1)=7$, ou seja, de $a+c+c=4$. A resposta é $CR_3^4 = C_6^4 = 15$.

39. Cada solução inteira e não negativa da inequação $x+y+z \leq 6$ corresponde a uma solução inteira e não negativa da equação $x+y+z+f \leq 6$. Logo, há $CR_4^6 = C_9^6 = 84$ soluções.

40. Para formar uma caixa, devemos selecionar 20 dentre os 5 tipos, valendo repetição na escolha. Ou seja, devemos formar soluções inteiras e não negativas de $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=20$, onde $x_i$ é o número de bombons do tipo $i$. A resposta é $CR_5^{20} = C_{24}^{20} = 10.626$.

## Seção 4.4

1. $C_7^2 + C_7^3 + \cdots + C_7^7 = 2^7 - C_7^0 - C_7^1 = 128 - 1 - 7 = 120$.

2. a) $C_{10}^p$ é elemento da linha 10. Em qualquer linha, o elemento máximo é o do meio. A resposta é $p=5$.

   b) $C_{21}^p$ é elemento da linha 21. Em qualquer linha, o elemento máximo é o do meio, A resposta é $p=10$ ou $p=11$.

3. $T_{p+1} = C_{10}^p \left(\frac{-1}{x^2}\right)^p (x^3)^{10-p} = C_{10}^p(-1)^p x^{30-5p}$ independerá de $x$ para $30-5p=0$, ou seja, $p=6$.

   A resposta é $T_7 = C_{10}^6(-1)^6x^0 = 210$.

4. $(1-x^2) = 1-2x+x^2$ e $(1+x)^n = x^n + nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} + \cdots$. Os termos em $x^n$ no produto são:

   $1.x^n = x^n$; $-2x.x^{n-1} = -2nx^n$; $x^2 \cdot \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}x^n$.

   A resposta é $1-2n+\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2-5n+2}{2}$

5. A soma pedida é $\sum_{k=0}^{n} C_n^k 3^k = (1+3)^n = 4^n$.

6. a) Seja $P(x) = (1+x+x^2)^n$. Então, $A_0+A_1+A_2+\cdots+A_n = P(1) = 3^n$.

   b) Sejam $S_0 = A_0+A_2+\cdots+A_{2n}$ e $S_1 = A_1+A_3+\cdots+A_{2n-1}$. Então $P(1) = S_0+S_1$ e $P(-1) = S_0-S_1$. Lodo, $S_0 = \dfrac{P(1)+P(-1)}{2} = \dfrac{3^n+1}{2}$.

7. $T_{p+1} = C_{120}^{p}\left(\frac{1}{2}\right)^p = \dfrac{120!}{p!(120-p)!}\cdot\dfrac{1}{2^p}$ e

$T_p = C_{120}^{p-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} = \dfrac{120!}{(p-1)!(121-p)!}\cdot\dfrac{1}{2^{p-1}}$;

$\dfrac{T_{p+1}}{T_p} = \dfrac{121-p}{2p}$; $T_{p+1} > T_p$ se $p \le 40$ e $T_{p+1} < T_p$ se $p \ge 41$

Daí $T_1 < T_2 < \cdots < T_{40} < T_{41} > T_{42} > \cdots > T_{121}$.

O termo máximo é $T_{41} = \dfrac{C_{120}^{40}}{2^{40}}$.

8. Sejam $a = 101^{50}$ e $b = 100^{50} + 99^{50}$. Temos:

$$
\begin{aligned}
a =& (100+1)^{50} = C_{50}^{0}100^{50} + C_{50}^{1}100^{49} + C_{50}^{2}100^{48} \\
& + \cdots + C_{50}^{49}100 + C_{50}^{50} \\
b =& 100^{50} + (100-1)^{50} = C_{50}^{0}100^{50} - C_{50}^{1}100^{49} + C_{50}^{2}100^{48} \\
& - \cdots - C_{50}^{49}100 + C_{50}^{50} + 100^{50}
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
a - b &= 2C_{50}^{1}100^{49} + 2C_{50}^{3}100^{47} + \cdots + 2C_{50}^{49}100 - 100^{50} \\
&= 2C_{50}^{1}100^{49} + \cdots + 2C_{50}^{49}100 > 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $a > b$.

# CAPÍTULO 5

## Probabilidade

## 5.1 Exercícios

### Seção 5.1

1. Lançam-se dois dados não-tendenciosos. Qual a probabilidade da soma dos pontos ser igual a 7?

2. 24 times são divididos em dois grupos de 12 times cada? Qual é a probabilidade de dois desses times ficarem no mesmo grupo?

3. Mostre que

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

4. Se $P(A) = \frac{2}{3}$ e $P(B) = \frac{4}{9}$, mostre que:

   a) $P(A \cup B) \geq \frac{2}{3}$.
   b) $\frac{2}{9} \leq P(A \cap \overline{B}) \leq \frac{5}{9}$.
   c) $\frac{1}{9} \leq P(A \cap B) \leq \frac{4}{9}$.

5. Cinco dados são jogados simultaneamente. Determine a probabilidade de se obter:

    a) um par.
    b) dois pares.
    c) uma trinca.
    d) uma quadra.
    e) uma quinta.
    f) uma seqüencia.
    g) um "full hand", isto é, uma trinca e um par.

6. Um polígono regular de $2n + 1$ lados está inscrito em um círculo. Escolhem-se três dos seus vértices, formando um triângulo. Determine a probabilidade do centro d0 círculo ser interior ao triângulo.

7. Doze pessoas são divididas em três grupos de 4. Qual é a probabilidade de duas determinadas dessas pessoas ficarem no mesmo grupo?

8. Em um grupo de 4 pessoas, qual é a probabilidade de haver alguma coincidência de signos zodiacales?

9. Em um armário há 5 pares de sapatos. Escolhem-se 4 pés de sapatos. Qual é a probabilidade de formar exatamente um par de sapatos?

10. Distribuindo ao acaso 5 sorvetes de creme e 5 de chocolate a 10 pessoas, das quais 3 preferem creme, 2 preferem chocolate e as demais não têm preferências, qual é a probabilidade de todas saírem satisfeitas?

11. Escolhem-se ao acaso duas peças de um dominó comum. Qual é a probabilidade delas possuírem um número comum?

12. No jogo da quina concorrem 80 dezenas e são sorteadas 5 dezenas. Clara apostou em 8 dezenas. Qual e a probabilidade de Clara acertar:

    a) 3 dezenas?
    b) 4 dezenas?
    c) 5 dezenas?

13. Em uma roda são colocadas $n$ pessoas. Qual é a probabilidade de duas dessas pessoas ficarem juntas?

14. Uma pessoa tem um molho de $n$ chaves, das quais apenas uma abre a porta. Se ela vai experimentando as chaves até acertar, determine a probabilidade dela só acertar na tentativa de ordem $k$, supondo:

    a) que a cada tentativa frustrada ela toma a sábia providencia de descartar a chave que não serviu.

    b) supondo que ela não age como no ítem a).

15. Há 8 carros estacionados em 12 vagas em fila. Determine a probabilidade:

    a) das vagas vazias serem consecutivas.

    b) de não haver duas vagas vazias adjacentes.

16. Se $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,5$, $P(C) = P(A \cap B) = 0,3$, $P(A \cap C) = 0$ e $P(B \cap C) = 0,1$, determine:

    a) $P(A \cup B \cup C)$.

    b) $P[A - (B \cup C)]$.

    c) $P[A \cap (B \cup C)]$.

    d) $P[(A \cap B) \cup C]$.

17. Em certa escola a probabilidade de um aluno ser torcedor do Flamengo é 0,60, de assistir novela é 0,70 e de gostar de praia é 0,80. Entre que valores está compreendia a probabilidade de um aluno dessa escola simultaneamente:

    a) assistir novela e gostar de praia.

    b) torcer pelo Flamengo

18. Laura e Telma retiram cada uma um bilhete numerado de uma urna que contém bilhetes numerados de 1 a 100. Determine a probabilidade do número de Laura ser maior que o de Telma, supondo a extração:

    a) sem reposição.

    b) com reposição.

19. Em uma gaveta há 10 pilhas das quais duas estão descarregadas. Testando-se as pilhas uma a uma até serem identificadas as duas descarregadas, determine a probabilidade de serem feitos:

    a) cinco testes.

    b) mais de cinco testes.

    c) menos de cinco testes.

## Seção 5.2

1. Joga-se um dado não-viciado duas vezes. Determine a probabilidade condicional de obter 3 na primeira jogada sabendo que a soma dos resultados foi 7.

2. Um estudante resolve um teste de múltipla escolha de 10 questões, com 5 alternativas por questão, ele acerta, e, quando não sabe, escolher a resposta ao acaso. Se ele acerta uma questão, qual e a probabilidade de que tenha sido por acaso?

3. Dois eventos $A$ e $B$ são independentes, por definição, quando $P(A \cap B) = P(A) \cdots P(B)$. Três eventos $A$, $B$ e $C$ são independentes, por definição, quando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$, $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$ e $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$. Jogue um dado duas vezes. Considere os eventos $A =$ {o resultado do primeiro lançamento é par}, $B =$ {o resultado do segundo lançamento é par} e $C =$ {a soma dos resultados é par}.

    a) $A$ e $B$ são independentes?

    b) $A$ e $C$ são independentes?

    c) $B$ e $C$ são independentes?

    d) $A$, $B$ e $C$ são independentes?

4. Determine a probabilidade de obter ao menos:

    a) um seis em 4 lançamentos de um dado.

    b) um duplo seis em 24 lançamentos de um par de dados.

5. Um exame de laboratório tem eficiência de 95% para detectar uma doença quando ela de fato existe. Entretanto o teste aponta um resultado falso-positivo para 1% das pessoas sadias testadas. Se 0,5% da população tem a doença, qual é a probabilidade de uma pessoa ter a doença, dado que o seu exame foi positivo?

6. Quantas vezes, no mínimo, se deve lançar um dado para que a probabilidade de obter algum seis seja superior a 0,9?

7. Em uma cidade com $n+1$ habitantes, uma pessoa conta um boato para outra pessoa, a qual, por sua vez, conta o boato para uma terceira pessoa, e assim por diante. Evidentemente ninguém é distraido a ponto de contar o boato para quem lhe havia contado o boato. Determine a probabilidade do boato ser contado $k$ vezes:

   a) sem retornar ao inventor do boato.

   b) sem repetir nenhuma pessoa.

8. Em uma cidade, as pessoas falam a verdade com probabilidade $\frac{1}{3}$. Suponha que $A$ faz uma afirmação e que $D$ diz que $B$ diz que $A$ falou a verdade, Qual é a probabilidade de $A$ ter falado a verdade?

9. Um prisioneiro possui 50 bolas brancas, 50 bolas pretas e duas urnas iguais. O prisioneiro deve colocar de modo que preferir as bolas nas urnas, desde que nenhuma urna fique vazia. As urnas serão embaralhadas e o prisioneiro deverá, de olhos fechados, escolher uma urna e, nesta urna, escolher uma bola. Se a bola for branca ele será libertado e, se for preta, será condenado. Como deve agir o prisioneiro para maximizar a probabilidade de ser liberado?

10. $2^n$ jogadores de igual habilidade disputam um torneio. Eles são divididos em grupos de 2, ao acaso, e jogadores de um mesmo grupo jogam entre si. Os perdedores são eliminados e os vencedores são divididos novamente em grupos de 2 e assim por diante até restar apenas um jogador que é proclamado campeão. Qual é a probabilidade dos jogadores $A$ e $B$ se enfrentarem durante o torneio. Qual é a probabilidade do jogador $A$ jogar exatamente $k$ partidas?

11. Em um torneio como o descrito no exercício anterior, os 16 jogadores têm habilidades diferentes e não há surpresas nos resultados (se $A$ é melhor que $B$, $A$ vence $B$).

a) Qual é a probabilidade do segundo melhor jogador ser vice-campeão do torneio?

b) Qual é a probabilidade do quarto melhor jogador ser vice-campeão do torneio?

c) Qual é o número máximo de partidas que o décimo melhor jogador consegue disputar? Qual é a probabilidade dele disputar esse número máximo de partidas?

12. Em um programa da televisão italiana, os candidatos devem escolher uma entre três portas. Atrás de uma dessas portas há um premio e atrás de cada uma das outras portas há um bode. Escolhida uma porta pelo candidato, o apresentador, que sabe onde estão os bodes, abre uma das outras portas, atrás da qual se encontra um bode, e pergunta ao candidato se ele quer ficar com a porta que escolheu ou se prefere trocá-la pela outra porta que ainda está fechada. Admitindo-se que, quando o candidato escolhe a porta em que está o premio, o apresentador escolha ao acaso uma porta para abrir, você acha que o candidato deve trocar, não deve trocar ou que tanto faz?

13. Qual é a probabilidade de serem obtidas exatamente 5 caras em 10 lançamentos de uma moeda não-tendenciosa?

14. Uma urna contém 4 bolas brancas e 6 bolas pretas. Sacam-se sucessivamente bolas dessa urna de acordo com o seguinte processo: Cada vez que uma bola é sacada, ela é devolvida à uma urna e são acrescentadas mais duas bolas da mesma cor que ela. Determine a probabilidade de:

   a) a segunda bola sacada ser branca.

   b) a primeira bola sacada ter sido branca na certeza de que a segunda bola sacada foi preta.

15. Um juiz de futebol meio trapalhão tem no bolso um cartão amarelo, um cartão vermelho e um cartão com uma face amarela e uma face vermelha. Depois de uma jogada violenta, o juiz mostra um cartão, retirando do bolso ao acaso, para um atleta. Se a face que o jogador vê é amarela, qual é a probabilidade da face voltada para o juiz ser vermelha?

16. $A$ e $B$ disputam uma série de partidas. Ganha um premio quem primeiro completar 10 vitórias. $A$ é mais habilidoso do que $B$, sendo de 0,6 a probabilidade

de $A$ ganhar uma partida e de 0,4 a probabilidade de $B$ ganhar uma partida. No momento o placar está $7 \times 4$ a favor de $B$. Qual é a probabilidade de $A$ ganhar o premio?

17. Três jogadores $A$, $B$ e $C$, disputam um torneio. Os três têm probabilidades iguais de ganhar o torneio; têm também probabilidade iguais de tirarem o segundo lugar e têm probabilidades iguais de tirarem o último lugar. É necessariamente verdadeiro que cada uma das seis ordens possíveis de classificação dos três jogadores tem probabilidade $\frac{1}{6}$ de ocorrer? Justifique.

18. Selecionam-se ao acaso dois pontos em uma circunferência. Qual a probabilidade da corda determinada por esses pontos ter comprimento maior do que o lado do triângulo equilátero inscrito na circunferência?

19. Seleciona-se ao acaso um ponto $X$ de um diâmetro $AB$ de uma circunferência. Qual a probabilidade da corda que contém $X$ e é perpendicular a $AB$ ter comprimento maior do que o lado do triângulo equilátero inscrito na circunferência?

20. Cristina e Maria, que não são pessoas muito pontuais, marcaram um encontre às 16 horas. Se cada uma delas chegar ao encontro em um instante qualquer entre 16 e 17 horas e se dispõe a esperar no máximo 10 minutos pela outra, qual é a probabilidade delas se encontrarem?

## 5.2 Soluções

### Seção 5.1

1. Há $6 \times 6 = 36$ resultados possíveis igualmente prováveis, em 6 dos quais a soma vale 7. A resposta é $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

2. Basta escolher os times do primeiro grupo, o que pode ser feito de $C_{24}^{12}$ modos. Os dois times em questão ficam juntos quando ficam ambos no primeiro grupo ou ambos no segundo grupo. Em ambos os casos, isto pode ser feito de $C_{22}^{10}$ modos. Logo, a resposta é $\dfrac{2C_{22}^{10}}{C_{24}^{12}} = \dfrac{2.22!.12!}{24!10!} = \dfrac{11}{23}$.

   **Outra solução:**

Supondo já escolhido o grupo do primeiro time, seus 11 companheiros de grupo podem ser escolhidos de $C_{23}^{11}$ modos. Dentre os grupos assim formados os que também incluem o segundo time são $C_{22}^{10}$, já que são formados escolhendo 10 times entre os 22 restantes. Logo, a resposta é $\frac{C_{22}^{10}}{C_{23}^{11}} = \frac{11}{23}$.

3. Usaremos o fato, já provado, de que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Temos:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) =& P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) \\ =& P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C). \end{aligned}$$

Agora, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ e daí

$$\begin{aligned} P((A \cup B) \cap C) =& P(A \cap C) + P(B \cap C) - P((A \cap C) \cap (B \cap C)) \\ =& P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Substituindo na expressão anterior, obtemos, finalmente:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) =& P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) \\ & - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

4. a) Como $A \subset A \cup B$, temos $P(A \cup B) \geq P(A) = \frac{2}{3}$.

b) Como $A \cap B$ e $B$ são disjuntos e $A \cap \overline{B} \cup B = A \cup B$, temos $P(A \cap \overline{B}) + P(B) = P(A \cup B)$ e, portanto, $P(A \cap \overline{B}) = P(A \cup B) - P(B) = P(A \cup B) - \frac{4}{9}$. Mas, do ítem anterior, $\frac{2}{3} \leq P(A \cup B) \leq 1$. Daí, $\frac{2}{3} - \frac{4}{9} \leq P(A \cap \overline{B}) \leq 1 - \frac{4}{9}$, ou seja, $\frac{2}{9} \leq P(A \cap \overline{B}) \leq \frac{5}{9}$.

c) Observe que $P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) = P(A)$, já que o conjunto da direita é a união disjunta dos da esquerda. Daí, $P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \overline{B}) = \frac{2}{3} - P(A \cap \overline{B})$. Como $\frac{2}{9} \leq P(A \cap \overline{B}) \leq \frac{5}{9}$, temos $\frac{2}{3} - \frac{5}{9} \leq P(A \cap B) \leq \frac{2}{3} - \frac{2}{9}$, ou seja, $\frac{1}{9} \leq P(A \cap B) \leq \frac{4}{9}$.

5. a) O número de casos possíveis $6^5$, pois há 6 resultados para cada um dos 5 dados. O número de casos favoráveis é $6 \cdot C_5^2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 3600$, pois há 6 modos de escolher o tipo de par (pode ser de 1, de 2, ..., de 6) e há $C_5^2$ modos de escolher os dois dados que formarão o par; quatro outros dados, o resultado do primeiro deles pode ser escolhido de 5 modos distintos (deve

ser diferente do resultado dos dois primeiros dados), o do segundo pode ser escolhido de 4 modos distintos (deve ser diferente dos anteriores) e, o do terceiro, de 3 modos diferentes.

Logo, $P(A_2) = \frac{3.600}{6^5} = \frac{25}{54} \equiv 0,463.$

b) O número de casos possíveis é $6^5$, pois há 6 resultados para cada um dos 5 dados. O número de casos favoráveis é $C_6^2 \cdot C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot 4 = 1800$, pois há $C_6^2$ modos de escolher os tipos de pares (podem ser de 1 e 2, de 1 e 3, ..., de 5 e 6), há $C_5^2$ modos de escolher os dois dados que formarão o par menor 3 $C_3^2$ modos de escolher os dados que formarão o par maior. Para o dado restante, que deve ter resultado diferente do dos demais dados, há 4 resultados possíveis.

Logo, $P(A_3) = \frac{180}{6^5} = \frac{25}{108} \equiv 0,231.$

**Observação:**

Um erro comum é contar os casos favoráveis em dobro, racionando do modo seguinte: Há 6 modos de escolher o tipo do primeiro par, 5 modos de escolher o tipo do segundo par, $C_5^2$ modos de escolher os dois dados que formarão o primeiro par, $C_3^2$ modos de escolher os dados que formarão o segundo par e há 4 modos de escolher o resultado do dado restante. Logo, o número de casos favoráveis é $6 \cdot 5 \cdot C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot 4 = 3.600$.

É claro que o erro provem da distinção artificial entre o primeiro e o segundo par, que faz com que um par de 2 e um par de 5 seja considerado diferente de um par de 5 e um par de 2.

c) O número de casos possíveis é $6^5$, pois há 6 resultados para cada um dos 5 dados. O número de casos favoráveis é $6 \cdot C_5^3 \cdot 5 \cdot 4 = 1200$, pois há 6 modos de escolher o tipo de trinca (pode ser de 1, de 2, ..., de 6) e há $C_5^3$ modos de escolher os três dados que terão resultados iguais; quatro aos outros dados, o resultado do primeiro deles pode ser escolhido de 5 modos distintos (deve ser diferente do resultado dos três primeiros dados) e, o do segundo, de 4 modos distintos (deve ser diferente dos anteriores).

Logo, $P(A_4) = \frac{1200}{6^5} = \frac{25}{162} \equiv 0,154.$

d) O número de casos possíveis é $6^5$, pois há 6 resultados para cada um dos 5 dados. O número de casos favoráveis é $6 \cdot C_5^4 \cdot 5 = 150$, pois há 6 modos de escolher o tipo de quadra (pode ser de 1, de 2, ..., de 6) e há $C_5^4$ modos

de escolher os quatro dados que terão resultados iguais; quatro ao dado restante, seu resultado pode ser de 5 modos distintos (deve ser diferente do resultado dos quatro primeiros dados).

Logo, $P(A_6) = \frac{150}{6^5} = \frac{25}{1296} \cong 0,019$.

e) O número de casos possíveis é $6^5$ e o número de casos favoráveis é 6.

Logo, $P(A_7) = \frac{6}{6^5} = \frac{1}{1296} \cong 0,0008$.

f) O número de casos possíveis é $6^5$, pois há 6 resultados para cada um dos 5 dados. Há dois tipos possíveis de seqüencias: a mínima (12345) e a máxima (23456). A mínima pode ser formada de $5! = 120$ modos distintos, pois há 5 modos de escolher o dado cujo resultado é 1, 4 modos de escolher o dado cujo resultado é 2, etc. Há analogamente, 120 modos de formar a seqüencia máxima.

Portanto, $P(A_8) = \frac{240}{6^5} = \frac{5}{162} \cong 0,031$.

g) O número de casos possíveis é $6^5$, pois há 6 resultados para cada um dos 5 dados. O número de casos favoráveis é $6 \cdot C_5^3 \cdot 5 = 300$, pois há 6 modos de escolher o tipo de trinca (pode ser de 1, de 2, ..., de 6) e há $C_5^3$ modos de escolher os três dados que formarão a trinca; quatro aos outros dados, há 5 modos distintos de escolher o resultado comum deles.

Logo, $P(A_5) = \frac{300}{6^5} = \frac{25}{684} \cong 0,039$.

6. Numeramos os vértices do polígono de 0 a $2n$. Imagine 0 como o vértice mais alto, os vértices de 1 a $n$ do lado direito e os vértices de $n+1$ a $2n$ do lado esquerdo. Podemos pensar que todos os triângulos têm 0 como um dos vértices. Há $C_{2n}^2 = \frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1)$ modos de selecionar os outros dois vértices do triângulo.

Para construir o número de triângulos que contêm o centro da circunferência em seu interior, observe inicialmente que a reta que contém o vértice $i (1 \le i \le n)$ e o centro da circunferência corta novamente o polígono no ponto médio do segmento determinado pelos vértices $i+n$ e $i+n+1$ (vértice $2n+1=$ vértice 0).

Um triângulo que contenha em seu interior o centro da circunferência será necessariamente formado por um vértice do lado direito e um vértice do lado

esquerdo. Se o vértice do lado direito for o vértice 1, o do lado esquerdo só poderá ser o vértice $n+1$ (1 possibilidade); se for o vértice 2, poderá ser qualquer dos vértices de $n+1$ a $n+2$ (2 possibilidades); ...; se for o vértice $n$, poderá ser qualquer dos vértices de $n+1$ a $2n$ (n possibilidades). O número de casos favoráveis é $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

A resposta é $\frac{n+1}{2(2n-1)}$.

7. Imagina o resultado do sorteio como uma fila de 12 lugares: o primeiro lugar corresponde à primeira pessoa sorteada área o primeiro grupo; o segundo à segunda pessoa sorteada para o segundo grupo; ...; o último, à quarta pessoa sorteada para o terceiro grupo. Colocada a primeira pessoa, há 11 posições para a segunda, em 3 das quais ela fica no mesmo grupo da primeira.

   A resposta é $\frac{3}{11}$.

8. Há 12 possibilidades para o signo de cada pessoa, para um total de $12^4$ possibilidades. Para que não haja coincidência de signos, o signo da primeira pessoa pode ser escolhido de 12 modos, o da segunda de 11, o da terceira de 10 e o da quarta de 9, para um total de $12\cdot 11\cdot 10\cdot 9$ modos. Assim, a probabilidade de que não haja coincidência de signos é $\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{12^4}=\frac{55}{96}$ e a probabilidade de que não haja coincidências é $1-\frac{55}{96}=\frac{41}{96}$.

9. Há $C_{10}^4$ modos de retirar 4 pés de sapatos. Para retirar 4 pés, havendo nesses 4 pés exatamente 1 par de sapatos, devemos inicialmente selecionar 1 par (o que pode ser feito de 5 modos) e depois selecionar 2 pés vindo de pares diferentes dentre os 4 pares que ainda estão no armário. Para isso devemos escolher os pares de onde virão esses sapatos ($C_4^2$ modos) e, em cada par escolhido, decidir se retiramos o pé direito ou o pé esquerdo ($2^2 - 4$ modos).

   A resposta é $\frac{5\cdot C_4^2\cdot 4}{C_1 0^4}=\frac{4}{7}$.

10. Para diminuir os sorvetes, devemos escolher as pessoas que receberão sorvetes de creme ($C_{10}^5$ modos) e dar sorvetes de chocolate às demais (1 modo). Para distinguir os sorvetes, respeitando as preferências, começamos dando sorvete

de creme aos que gostam de creme e de chocolate aos que gostam de chocolate (1 modo). Em seguida, devemos distribuir 2 sorvetes de creme e 3 sorvetes de chocolate a 5 pessoas que não têm preferências; para isso, devemos escolher as 2 pessoas que receberão sorvetes de creme ($C_5^2$ modos) e dar sorvetes de chocolate às restantes (1 modo).

A resposta é $\dfrac{C_5^2}{C_{10}^5} = \dfrac{5}{126}$.

11. As peças do dominó são formadas por dois, não necessariamente distintos, dos números 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Há $CR_7^2 = C_8^2 = 28$ peças e há $C_{28}^2$ modos de selecionar duas peças de um dominó. Para selecionar duas peças com um número comum , deve-se primeiramente selecionar o número comum (7 possibilidades) e, depois, selecionar 2 das 7 peças que contêm esse número comum ($C_7^2$ possibilidades).

A resposta é $\dfrac{7C_7^2}{C_{28}^2} = \dfrac{7}{18}$.

12. O número de sorteios possíveis é $C_{80}^5$.

a) O apostados acerta 3 dezenas quando são sorteadas das 8 dezenas em que apostou e 2 das 72 em que não apostou. Tais sorteios podem ser efetuados de $C_8^3 \cdot C_{72}^2$ modos.
A resposta é $\dfrac{C_8^3 \cdot C_{72}^2}{C_{80}^5}$ (que é aproximadamente igual a $\dfrac{1}{168}$).

b) O apostados acerta 4 dezenas quando são sorteadas 4 das 8 dezenas em que apostou e 1 das 72 em que não apostou. Tais sorteios podem ser efetuados de $C_8^4 \cdot C_{72}^1$ modos.
A resposta é $\dfrac{C_8^4 \cdot C_{72}^1}{C_{80}^5}$ (que é aproximadamente igual a $\dfrac{1}{4770}$).

c) O apostados acerta 5 dezenas quando são sorteadas 5 das 8 dezenas em que apostou. Tais sorteios podem ser efetuados de $C_8^5$ modos.
A resposta é $\dfrac{C_8^5}{C_{80}^5} = \dfrac{1}{429.286}$.

13. Colocada a primeira pessoa na roda, há $n-1$ posições pra a segunda pessoa, das quais 2 são favoráveis a que ela fique junto da primeira pessoa.

A resposta é $\dfrac{2}{n-1}$.

14. a) Há posições igualmente prováveis que e chave "certa" poderia ocupar: ser a primeira a ser testada, a segunda, ..., a última. A probabilidade de elas ocupar a $k$-ésima posição é $1/n$.

**Outra solução:**

Há $n!$ maneiras de ordenar as chaves a serem tentadas. Para formar as ordenações que tem a chave na $k$-ésima posição, devemos colocar as $n-1$ chaves restantes nas $n-1$ posições restantes, o que pode ser feito de $(n-1)!$ modos. Logo, a probabilidade de que a chave certa esteja na posição $k$ é $\dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$.

b) As primeiras $k$ tentativas podem ser feitas de $n^k$ modos (cada chave pode ser escolhida de $n$ modos, já que chaves correspondentes a tentativas frustadas não são descartadas). Para que se acerte na $k$-ésima tentativa, as primeiras $k-1$ chaves devem ser incorretas (portanto, podem ser escolhidas de $(n-1)^{k-1}$ modos) e a de ordem $k$ deve ser a correta (1 modo). Logo, a probabilidade de se acertar na $k$-ésima tentativa é $\dfrac{(n-1)^{k-1}}{n^k}$.

15. a) Há $C_{12}^4 = 495$ modos de selecionar as 4 vagas que não serão ocupadas e 9 modos de escolher 4 vagas consecutivas (1 2 3 4, 2 3 4 5, ..., 9 10 11 12). A resposta é $\dfrac{9}{495} = \dfrac{1}{55}$

b) Há $C_{12}^4 = 495$ modos de selecionar as 4 vagas que não serão ocupadas. Para contar o número de possibilidades em que não há vagas vazias adjacentes, devemos escolher 4 dos 9 espaços existentes antes, entre e depois dos carros para ficarem vazios, Isto pode ser feito de $C_9^4$ modos. Logo a probabilidade de que não haja vagas consecutivas é $\dfrac{126}{495} = \dfrac{14}{55}$.

16. $P(A \cap B \cap C) = 0$, pois $A \cap B \cap C \subset A \cap C$ e $P(A \cap C) = 0$.

a)

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) =& P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) \\ & - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\ =& 0,4 + 0,5 + 0,3 - 0,3 - 0 - 0,1 + 0 - 0,8 \end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
P[A \quad (B \cup C)] &= P(A) - P[A \cap (B \cup C)] \\
&= P(A) - P[(A \cap B) \cup (A \cap C)] \\
&= P(A) \quad P(A \cap B) - P(A \cap C) \\
&\quad + P[(A \cap B) \cap (A \cap C)] \\
&= P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) \\
&\quad + P[(A \cap B \cap C)] \\
&= 0,4 - 0,3 - 0 + 0 = 0,1
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
P[(A \cap B) \cup C] &= P(A \cap B) + P(C) - P(A \cap B \cap C) \\
&= 0,3 + 0,3 - 0 = 0,6
\end{aligned}
$$

17. a) A resposta, naturalmente, 1/2, já que, de todos os pares de números distintos de 1 a 100, em exatamente a metade o primeiro número é maior do que o segundo.

b) O número total de possíveis extrações é $100 \times 100 = 10.000$, já que o bilhete de cada uma das moças pode ser escolhido de 100 modos. Em 100 destas possíveis extrações os dois números são iguais e em metade das restantes, ou seja, em $9900/2 = 4950$ delas, o primeiro número é maior do que o segundo. Logo, a probabilidade de o número de Laura ser maior do que o de Telma é $\dfrac{4950}{10000} = 0,495$.

18. a) São feitos 5 testes quando uma das quatro primeiras pilhas testadas está descarregada, o mesmo ocorrendo com a quinta a ser testada. A primeira pilha a ser testada pode ser escolhida de 10 modos, a segunda de 9, e assim por diante, para um total de $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ modos possíveis para escolher as 5 primeiras pilhas a serem testadas. Para formar uma seqüencia de teste em que a segunda defeituosa é detectada na 5ª tentativa, devemos escolher a pilha defeituosa que aparece na 5ª posição (2 modos), a posição da outra defeituosa (4 modos) e, finalmente, as pilhas não defeituosas para as demais posições ($8 \cdot 7 \cdot 6$ modos). Logo, a probabilidade pedida é $\dfrac{2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \dfrac{4}{45}$.

b) São efetuados até 5 testes quando as pilhas defeituosas aparecem nas 5 primeiras tentativas. Como visto no ítem anterior, há $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ modos de se fazer esta tentativa. Para formar aquelas em que as duas defeituosas estão entre as testadas devemos escolher a posição da primeira pilha defeituosa (5 modos), a da segunda (4 modos) e, finalmente, as pilhas não defeituosa para as outras tentativas ($8 \cdot 7 \cdot 6$ modos). A probabilidade de que sejam feitos até 5 testes é $\frac{5 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{2}{9}$ e, portanto, a probabilidade pedida é igual a $1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$.

c) Para que sejam feitos menos de 4 testes, as duas pilhas defeituosas devem aparecer nos primeiros 4 testes. O número total de escolhas para os 4 primeiros testes é $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$. Para formar uma seqüencia de teste em que as duas defeituosas aparecem nestas 4 tentativas, devemos escolher a posição da primeira pilha defeituosa (4 modos) a da segunda (3 modos) e, finalmente, as pilhas não defeituosas para as duas outras posições ($8 \cdot 7$ modos). A probabilidade pedida é $\frac{4 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 7}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{2}{15}$

## Seção 5.2

1. Sejam $X$ e $Y$ os resultados do primeiro e segundo lançamentos, respectivamente. $P(X = 3|X + Y = 7) = \frac{P(X = 3, X + Y = 7)}{P(X + Y = 7)} = \frac{1/6 \cdot 1/6}{6/36} = \frac{1}{6}$.

   **Outra solução:**

   Se a soma é 2, há 6 casos possíveis igualmente prováveis: $X = 1$, $Y = 6$; $X = 2$, $Y = 5$; $X = 3$, $Y = 4$; $X = 4$, $Y = 3$; $X = 5$, $Y = 2$;$X = 6$, $Y = 1$. Dos seis casos, somente $X = 3$, $Y = 3$ é favorável. A resposta é $\frac{1}{6}$.

2.

$$
\begin{aligned}
P(\text{não sabe} \mid \text{acerta}) &= \frac{P(\text{não sabe e acerta})}{P(\text{ acerta})} \\
&= \frac{P(\text{não sabe}) \cdot P(\text{acerta} \mid \text{não sabe})}{P(\text{sabe}) \cdot P(\text{acerta} \mid \text{sabe}) + P(\text{não sabe}) \cdot P(\text{acerta} \mid \text{não sabe})} \\
&= \frac{0,4 \cdot 0,2}{0,6 \cdot 1 + 0,4 \cdot 0,2} = \frac{2}{17}
\end{aligned}
$$

3. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = 1/2 \cdot 1/2 = P(A) \cdot P(B)$; logo, $A$ e $B$ são independentes.

   Observe que $A \cap C = A \cap B$ e que $P(C) = \frac{1}{2} \cdot P(A \cap C) = P(A \cap B) = 1/2 \cdot 1/2 = P(A) \cdot P(C)$; logo, $A$ e $C$ são independentes.

   Observe que $B \cap C = A \cap B$ e que $P(C) = \frac{1}{2} \cdot P(B \cap C) = P(A \cap B) = 1/2 \cdot 1/2 = P(B) \cdot P(C)$; logo, $B$ e $C$ são independentes.

   Como $A \cap B \cap C = A \cap B$, $P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) = 1/2 \cdot 1/2$, que é diferente de $P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2$; logo, $A$, $B$ e $C$ não são independentes.

4. a) A probabilidade de nenhum seis em quatro lançamentos $\left(\frac{5}{6}\right)^4 \equiv 0,4823$. A probabilidade de pelo menos um seis é $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \equiv 1 - 0,4823 = 0,5177$.

   b) A probabilidade de nenhum duplo seis em 24 lançamentos de um par de dados é $\left(\frac{35}{36}\right)^{24} \equiv 0,5086$. A probabilidade de pelo menos um duplo seis é $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \equiv 1 - 0,5086 = 0,4914$.

5.

$$
\begin{aligned}
P(\text{doente} \mid \text{positivo}) &= \frac{P(\text{doente e positivo})}{P(\text{positivo})} \\
&= \frac{P(\text{doente} \cdot \text{positivo} \mid \text{doente})}{P(\text{doente}) \cdot P(\text{positivo} \mid \text{doente}) + P(\text{sadio}) \cdot P(\text{positivo} \mid \text{sadio})} \\
&= \frac{0,005 \cdot 0,95}{0,005 \cdot 0,95 + 0,995 \cdot 0,01} = \frac{95}{294} \cong 0,3231
\end{aligned}
$$

6. A probabilidade de não obter nenhum seis em $n$ lançamentos é $\left(\frac{5}{6}\right)^n$ e de obter pelo menos um de seis é $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$. Devemos ter $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0,9$, ou seja, $\left(\frac{5}{6}\right)^n < 0,1$.

   Daí,

$$
\begin{aligned}
\ln\left(\frac{5}{6}\right)^n &< \ln 0,1 \\
n \cdot \ln\frac{5}{6} &< \ln 0,1 \\
n &> \frac{\ln 0,1}{\ln\frac{5}{6}} \cong 12,6
\end{aligned}
$$

   A resposta é 13.

7. a) Cada pessoa tem $n$ modos de escolher a quem conta o boato. Logo, o número de modos de o boato ser contado $m$ vezes é $n^m$.

   O número de modos de o boato ser contado $m$ vezes, sem retornar à primeira pessoa é $n(n-1)^{m-1}$, pois o primeiro ouvinte pode ser selecionado de $n$ modos e os demais, de $n-1$ modos. A resposta é $\frac{n(n-1)^{m-1}}{n^m} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{m-1}$.

   b) Cada pessoa tem $n$ modos de escolher a quem conta o boato. Logo, o número de modos de boato ser contado $m$ vezes é $n^m$.

   Para o boato ser contado $m$ vezes, sem repetir nenhuma pessoa, o primeiro ouvinte pode ser selecionado de $n$ modos; o segundo, de $n-1$ modos; o terceiro, de $n-2$ modos; ...; o $m$-ésimo, de $n-(m-1) = n-m+1$ modos. O número de modos de o boato ser contado $m$ vezes, sem retornar à primeira pessoa, é $n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1) = \dfrac{n!}{(n-m)!}$

   A resposta é $\dfrac{n!}{(n-m)!n^m}$.

8. Considere os eventos:

   $A = \{A$ falou a verdade$\}$;

   $B = \{B$ disse que $A$ falou a verdade$\}$;

   $C = \{C$ disse que $B$ disse que $A$ falou a verdade$\}$;

   $D = \{D$ disse que $C$ disse que $B$ disse que $A$ falou a verdade$\}$.

   Vamos aliviar a notação escrevendo $XY$ para representar $X \cap Y$.

   Queremos calcular $P(A|D) = \dfrac{P(AD)}{P(D)}$.

$$P(AD) = P(ABCD) + P(A\overline{B}CD) + P(AB\overline{C}D) + P(A\overline{B}\overline{C}D)$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{13}{81}$$

$$P(\overline{A}D) = P(\overline{A}BCD) + P(\overline{A}\overline{B}CD) + P(\overline{A}B\overline{C}D) + P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}D)$$
$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{28}{81}.$$

$$P(D) = P(AD) + P(\overline{A}D) = \frac{13}{81} + \frac{28}{81} = \frac{41}{81}.$$

A resposta é $P(A|D) = \dfrac{P(AD)}{P(D)} = \dfrac{13/81}{41/81} = \dfrac{13}{41}$.

9. Uma urna recebe uma bola branca e a outra urna recebe as demais 99 bolas. Com efeito, se a 1ª urna recebe $k$ bolas das quais a são brancas, a probabilidade de libertação é

$$f(a,k) = \frac{1}{2}\left[\frac{a}{k} + \frac{50-a}{100-k}\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{50k + a(100-2k)}{k(100-k)}.$$

Observe que para $k = 50$ a expressão vale $\frac{1}{2}$, independentemente do valor de $a$.

Observe também que basta estudar agora o caso $k < 50$ (isto é, podemos considerar a primeira urna como sendo a que recebeu menos bolas). Nesse caso, é claro que, fixando o valor de $k$, quando maior for $a$, maior será $f(a,k)$. Logo, para $f(a,k)$ ser máximo, devemos ter $a = k$ e a probabilidade será $g(k) = \frac{1}{2}\frac{150-2k}{100-k} = \frac{75-k}{100-k} = 1 - \frac{25}{100-k}$, que é máxima para $k$ mínimo.

Devemos, pois, ter $k = 1$, o que dá uma probabilidade de libertação de $\frac{74}{99} \cong 0{,}75$.

10. a) A probabilidade de eles se enfrentarem na primeira ronda é $\frac{1}{2^n - 1}$ porque, posto $A$ na tabela, há $2^n - 1$ posições possíveis para $B$ e em 1 delas ele enfrenta $B$. A probabilidade deles se enfrentarem na segunda rodada é $\frac{2}{2^n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^n-1} \cdot \frac{1}{2}$, porque posto $A$ na tabela, há $2^n - 1$ posições possíveis para $B$ e em 2 delas ele pode vir a enfrentar $B$ na segunda rodada, o que ocorre com probabilidade $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$. A probabilidade de eles se enfrentarem na terceira rodada é $\frac{2^2}{2^n-1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{2^n-1} \cdot \frac{1}{2^2}$, etc.

A resposta é

$$\frac{1}{2^n-1} + \frac{1}{2^n-1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n-1} \cdot \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n-1} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$$
$$= \frac{1}{2^n-1} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

b) Se $k < n$, o jogador disputa exatamente $k$ partidas se e somente se perde a $k$-ésima partida e ganha as $k-1$ partidas anteriores. A probabilidade de isso acontecer é $\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}$. O jogador disputa $n$ partidas - ou seja, chega à final - se e somente se ganha as $n-1$ partidas anteriores. A probabilidade de isso acontecer é $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}$.
A resposta é $\frac{1}{2^k}$, se $k < n$; $\frac{1}{2^{n-1}}$, se $k = n$.

11. a) O segundo jogador de melhor resultado será vice-campeão se e somente se não enfrentar o melhor jogador antes da final. Posto o melhor jogador na tabela, há 15 posições possíveis para o segundo melhor e em 8 delas ele enfrenta o melhor jogador apenas na final. A resposta é $\frac{8}{15}$.

b) Posto o 4º colocado na tabela, os demais times podem ser colocados de 15! modos. Para que o 4º melhor time seja vice-campeão, os 3 melhores times não podem entrar em sua chave. As posições destes times podem portanto, ser escolhidas de 8, 7 e 6 modos, respectivamente. Para distribuir os 12 times restantes, há 12! possibilidades. Logo, a probabilidade desejada é $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 12!}{15!} = \frac{8}{65}$.

c) Na primeira rodada, há 6 adversários que o 10º time consegue derrotar. Na melhor das hipóteses, ele derrota um destes e, dos outros 5, dois conseguem sobreviver para a próxima fase. De novo, na melhor das hipóteses o 10º enfrenta (e vence) um deles, mas o outro será fatalmente eliminado. Assim, na 3ª rodada, o 10º time joga e perde. Logo, ele disputa no máximo três partidas. Isto ocorre quando os três times da sua chave para os dois primeiros jogos são todos de habilidade inferior. O número de modos de escolher 3 adversários é $15 \cdot 14 \cdot 13$. O número de modos de escolher três adversários entre os 6 de nível inferior é $6 \cdot 5 \cdot 4$. Logo, a resposta é $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{15 \cdot 14 \cdot 13} = \frac{4}{91}$.

12. Se o candidato não troca de porta, ele ganha o premio se e só se escolhe, originalmente, a porta certa. Logo, se ele não troca, sua probabilidade de ganhar o primeiro premio é igual a $\frac{1}{3}$. Em contraste, ao trocar de porta ele ganha o premio sempre que escolheu originalmente a porta errada, o que ocorre com probabilidade $\frac{2}{3}$. Portanto, ele deve trocar de porta.

13. Cada um dos 10 resultado pode ser escolhido de 2 modos. Portanto, há $2^{10}$

resultados possíveis. Para formar um resultado com 5 caras, é necessário escolher 5 dos 10 lançamentos para estas caras ocorrerem, o que pode ser feito de $C_{10}^5$ modos. A probabilidade pedida é $\frac{C_{10}^5}{2^{10}} = \frac{63}{256}$.

14. a)

$$\begin{aligned} P(2^{\underline{a}}B) &= P(1^{\underline{a}}B,^{\underline{a}}B) + P(1^{\underline{a}}P, 2^{\underline{a}}B) \\ &= P(1^{\underline{a}}B) \cdot P(2^{\underline{a}}B|1^{\underline{a}}B) + P(1^{\underline{a}}P) \cdot P(2^{\underline{a}}B|1^{\underline{a}}P) \\ &= \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{12} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{12} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P(1^{\underline{a}}B|2^{\underline{a}}P) &= \frac{P(1^{\underline{a}}B, 2^{\underline{a}}P)}{P(2^{\underline{a}}P)} \\ &= \frac{P(1^{\underline{a}}B) \cdot P(2^{\underline{a}}P|1^{\underline{a}}B)}{P(1^{\underline{a}}B) \cdot P(2^{\underline{a}}P|1^{\underline{a}}B) + P(1^{\underline{a}}P) \cdot P(2^{\underline{a}}P|1^{\underline{a}}P)} \\ &= \frac{\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{12}}{\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{12} + \frac{6}{10} \cdot \frac{8}{12}} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

15. $P(\text{vê vermelha} \mid \text{mostra amarela}) = \frac{P(\text{vê vermelha e mostra amarela})}{P(\text{mostra amarela})}$

$= \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$.

16. O jogador $A$ ganha o primeiro se e somente se $B$ ganhar no máximo 2 das próximos 8 partidas (caso contrario, $B$ terá sua $10^{\underline{a}}$ vitória antes de $A$ completar sua série de 10 vitórias).

$P(B \text{ ganhar } 0 \text{ partidas}) = 0,6^8 \cong 0,0168$

$P(B \text{ ganhar } 1 \text{ partidas}) = 8 \cdot 0,6^7 \cdot 0,4 \cong 0,0896$

$P(B \text{ ganhar } 2 \text{ partidas}) = C_8^2 \cdot 0,6^6 \cdot 0,4^2 \cong 0,2090$

A probabilidade de que $A$ ganhe o premio é aproximadamente igual a $0,0168 + 0,0896 + 0,2090 = 0,3154$.

17. Sejam $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ as probabilidades das possíveis ordenações $ABC$, $BCA$, $CAB$, $ACB$, $CBA$, $BAC$. As condições dadas no problema permitem escrever um sistema de equações lineares envolvendo aquelas probabilidade:

$$P_1 + p_4 = P_2 + p_6 = P_3 + p_5 = \frac{1}{3}$$
$$P_3 + p_6 = P_1 + p_5 = P_2 + p_4 = \frac{1}{3}$$
$$P_2 + p_5 = P_3 + p_4 = P_1 + p_6 = \frac{1}{3}$$

Resolvendo o sistema, verifica-se que ele tem uma infinidade de soluções da forma $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{6} - p_4 = \frac{1}{6} \quad p_5 = \frac{1}{5} - p_6$.

Em termos mais intuitivos, basta que as ordenações correspondente à mesma ordem circular tenham probabilidades iguais, ou seja, devemos ter:

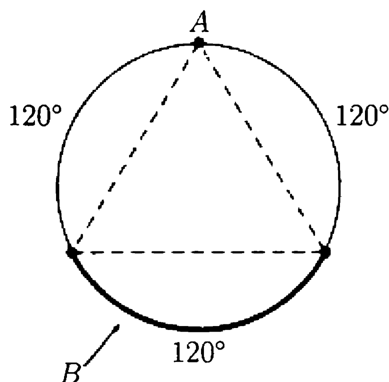
$$P(ABC) = P(BCA) = P(CAB)$$

e

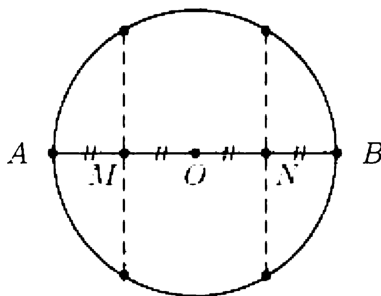
$$P(ACB) = P(CBA) = P(BAC).$$

Por exemplo, se $P(ABC) = P(BCA) = P(CAB) = \frac{1}{4}$ e $P(ACB) = P(CBA) = P(BAC) = \frac{1}{12}$, os três jogadores têm a mesma chance de ficar em primeiro, segundo ou terceiro lugar, embora as diferencias ordenações possíveis não tenham todas a mesma probabilidade de ocorrer.

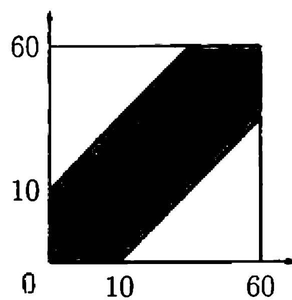
18. Dois pontos $A$ e $B$ de um circulo determinam uma corda maior que o lado de um triângulo equilátero inscrito se e somente se o menor arco $AB$ é maior do que 120°. Isto significa, que uma vez escolhido o ponto $A$, o ponto $B$ não deve estar no arco de 240° com ponto médio em $A$, como mostra a figura. Como $B$ é escolhido ao acaso, admitimos que a probabilidade de que ele esteja em um arco seja proporcional ao comprimento do arco. Assim, a probabilidade pedida é $\frac{120}{360} = \frac{1}{3}$.




19. Uma corda perpendicular a $AB$ tem comprimento maior do que o lado do triângulo equilátero inscrito se e somente se corta $AB$ entre os pontos $M$ e $N$, médios de $OA$ e $OB$ é centro do círculo, como mostra a figura. Logo, a probabilidade pedida é $\frac{MN}{AB} = \frac{1}{2}$.




20. Contando o tempo em minutos, a partir das 16 horas, e designando por $x$ e $y$ os instantes de chagada de Cristina e Maria, a região "possível" é $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 60,\ 0 \leq y \leq 60\}$ (um quadrado de lado 60) e a região "favorável" é $A = \{(x, y) :\ 0 \leq x \leq 60,\ 0 \leq y \leq 60,\ |x - y| \leq 10\}$. A desigualdade $|x - y| \leq 10$ é equivalente a $x - 10 \leq y \leq x + 10$, o que mostra que a região favorável é uma "faixa" em torno da diagonal do quadrado, como mostra a figura.




A probabilidade desejada é: $\dfrac{\text{área de } A}{\text{área de } \Omega} = \dfrac{60^2 - 2 \cdot 50 \cdot 50/2}{60^2} = \dfrac{11}{36}$.

# CAPÍTULO 6

## Médias e o Princípio das Gavetas

### 6.1 Exercícios

#### Seção 6.1

1. Um carro percorre metade de certa distancia $d$ com velocidade $v_1$ e percorre a outra metade com velocidade $v_2$. Qual a sua velocidade média?

2. Um carro tem velocidade $v_1$ durante metade do tempo $t$ de percurso e tem velocidade $v_2$ durante a outra metade do tempo. Qual a sua velocidade média?

3. A população de um país cresceu 44% em uma década e cresceu 21% na década seguinte. Qual é, aproximadamente, a taxa média decenal de crescimento nesses 20 anos?

4. No problema anterior, qual é a taxa média anual de crescimento nesses 20 anos?

5. A valorização mensal das ações de certa empresa nos quatro primeiros meses do ano foi de +25%, +25%, -25% e 25%. Qual a valorização total e qual a valorização média nesse quadrimestre?

6. Em uma cela há três túneis. Um conduz à liberdade em 3 horas; outro em 5 horas, e o último conduz ao ponto de partida depois de 9 horas. Qual o tempo médio que os prisioneiros que descobrem os túneis gastam para escapar?

7. Suponha que, no problema anterior, os prisioneiros que entram pelo terceiro túnel, quando voltam ao ponto de partida, não se lembram de qual foi o túnel em que entraram e, portanto, escolhem para a próxima tentativa um entre os três túneis.

8. Prove que a média aritmética $\bar{x}$ de uma lista de números satisfaz $m \leq \bar{x} \leq M$, onde $m$ e $M$ são respectivamente o menor e o maior dos números.

9. Prove que a média geométrica $g$ de uma lista de $n$ números positivos satisfaz $m \leq g \leq M$, onde $m$ e $M$ são respectivamente o menor e o maior dos números.

10. Prove que a média harmônica $h$ de uma lista de $n$ números positivos satisfaz $m \leq h \leq M$, onde $m$ e $M$ são respectivamente o menor e o maior dos números.

11. Em um concurso, havia apenas provas de Português e Matemática. O resultado do concurso está no quadro abaixo.

| Candidato | Port. | Mat. | Classificação |
|---|---|---|---|
| João | 5 | 7 | 2º |
| Pedro | 6 | 4 | 1º |
| José | 2 | 5 | 4º |
| Paulo | 4 | 1 | 3º |

João achou que havia erro na classificação porque fizera mais pontos que Pedro e classificara-se atrás dele. Houve necessariamente erro na classificação?

12. Pneus novos duram 40000 km, quando usados nas rodas dianteiras, e duram 60000 km, quando usados nas rodas traseiras.

    a) Com 4 pneus novos e fazendo um rodízio adequado entre eles, quantos quilômetros um carro pode rodar? Como?

    b) E com 5 pneus novos? Como?

    c) A resposta do ítem a) é uma média entre 40000 km e 60000km. Qual?

13. A média aritmética de 50 números é 40. Se dois desses números, 125 e 75, forem suprimidos, qual será a média aritmética dos números restantes?

14. Qual a característica conservada pela média quadrática?

15. Prove que a média quadrática $q$ de uma lista de $n$ números positivos satisfaz $m \leq q \leq M$, onde $m$ e $M$ são respectivamente o menor e o maior dos números.

16. Prove que, para dois números positivos $x_1$ e $x_2$. suas médias aritmética $A$, geométrica $G$, harmônica $H$ e quadrática $Q$, satisfazem $H \leq G \leq A \leq Q$.

    Prove também que duas dessas médias são iguais se e somente se $x_1 = x_2$.

17. Qual seria o problemas de medir a qualidade de uma lista de aproximações pela média aritmética dos erros?

18. Para determinar uma grandeza desconhecida $x$, foram feitas várias medições. Os resultados obtidos foram $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Determine a estimativa de $x$ para qual o erro médio quadrático é mínimo.

19. Para determinar uma grandeza desconhecida $x$, foram feitas várias medições. Os resultados obtidos foram $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tais que $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$. Determine a estimativa de $x$ para a qual a média dos valores absolutos dos erros é mínima.

20. Eduardo observou que o consumo de energia elétrica em sua casa estava aumentando muito. Fez então um gráfico do consumo anual, em kWh, nos últimos 5 anos, tomando 1991 como ano 0. Os valores obtidos encontram-se no quadro abaixo e Eduardo achou que o gráfico parecia-se com uma reta.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ANO | $(x)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| CONSUMO | $(y)$ | 820 | 1000 | 1200 | 1350 | 1550 |

    É fácil ver que os pontos encontrados não são colineares, mas pode-se notar no gráfico que é possível traçar retas que passem bem perto dos cinco pontos. Mostrando o gráfico a seus amigos Augusto e Sérgio, eles sugeriram as retas $y = 170x + 850$ e $y = 180 + 800$, respectivamente, como as retas que mais se aproximariam dos pontos.

    a) Mostre que os pontos realmente não são colineares.

    b) Calcule os erros médios quadráticos e determine qual das duas retas mais se aproxima dos pontos.

c) Entre todas as retas do plano, qual é a que mais se aproxima dos pontos?

21. Mostre que em qualquer conjunto de 8 inteiros há sempre dois deles cuja diferencia é múltiplo de 7.

22. Em uma festa há 20 crianças sentadas em torno de uma mesa circular. Um garçom coloca diante de cada criança, sem perguntar qual a sua preferência, uma taça de sorvete. Alguns desses sorvetes são de creme e os outros são de flocos. 10 das crianças preferem creme e 10 preferem flocos. Mostre que, sem mexer nas crianças e fazendo apenas uma rotação da mesa, é possível fazer com que pelo menos 10 crianças tenham suas preferências respeitadas.

23. Mostre que em toda reunião de $n$ pessoas há sempre duas pessoas com o mesmo número de conhecidos.

24. Mostre que existe um múltiplo de 1997 que tem todos os dígitos iguais a 1.

25. Qual é o número mínimo de pessoas que deve haver em um grupo para que possamos garantir que nele há pelo menos 7 pessoas nascidas no mesmo mês?

26. São dados, no plano, cinco pontos de coordenadas inteiras. Mostre que, entre os dez segmentos determinados por esses pontos, pelo menos um tem como ponto médio um ponto de coordenadas inteiras.

27. Prove que $Nk+1$ objetos são colocados em $N$ gavetas, pelo menos uma gaveta recebe mais de $k$ objetos.

28. 40100 candidatos estão fazendo uma prova de 20 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas por questão. Suponha que nenhum candidato deixe de responder a nenhuma questão. Considere a afirmação: "Pelo menos $k$ candidatos responderão de modo idêntico às 4 primeiras questões da prova". Determine o maior valor de $k$ para o qual a afirmação é certamente verdadeira.

29. 40100 candidatos estão fazendo uma prova de 20 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas por questão. Suponha que nenhum candidato deixe de responder a nenhuma questão. Considere a afirmação: "Pelo menos 4 candidatos responderão de modo idêntico às $k$ primeiras questões da prova". Determine o maior valor de $k$ para o qual a afirmação é certamente verdadeira.

30. Os pontos de uma reta são coloridos com 11 cores. Mostre que é possível achar dois pontos com a mesma cor tal que a distancia entre eles é um número inteiro.

31. Em um campeonato cada dois times entre si uma única vez. Mostre que em qualquer momento há sempre dois times que disputaram o mesmo número de partidas.

32. Sete pontos são selecionados dentro de um retângulo $3 \times 4$. Prove que há dois desses pontos tais que a distancia entre eles é no máximo igual a $\sqrt{5}$.

33. Selecionam-se oito números distintos no conjunto $\{1, 2, \ldots, 15\}$. Mostre que há pelo menos três pares de número selecionados com a mesma diferença entre o maior e o menor número do par.

34. Sejam $x_1$ e $x_2$ números reais, $x_1 < x_2$.

    a) Mostre que os números reais $x$ tais que $x_1 < x < x_2$ podem ser escritos na forma $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ com $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1$ e $\lambda_2$ positivos, isto é, são médias aritméticas ponderadas, com pesos positivos, de $x_1$ e $x_2$. Essa representação é única?

    b) Mostre que os números reais $x$ da forma $x = \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_2$ com $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1$ e $\lambda_2$ positivos, pertencem a $(x_1, x_2)$.

    c) Onde estão os pontos $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ com $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ e $\lambda > 1$?

    d) E com $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ e $\lambda_1 < 0$?

35. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais, $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, $n > 2$.

    a) Mostre que os número reais $x$ tais que $x_1 < x < x_n$ podem ser escritos na forma $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$ com $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ positivos. Essa representação é única?

    b) Mostre que os número reais $x$ da forma $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$, $n > 2$, com $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ positivos, pertencem a $(x_1, x_n)$.

36. Em um grupo de pessoas há 30 homens e 10 mulheres. Os homens têm altura média de 1,75m e, as mulheres, de 1,67m. Qual a altura média do grupo?

## Seção 6.2

1. Prove que o produto de dois números de soma constante é máximo quando esses números são iguais.

2. Prove que a soma de dois números positivos de produto constante é mínima quando esses números são iguais.

3. Prove que a média harmônica de $n$ números positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é sempre menor que ou igual a sua média geométrica e só é igual quando todos os números são iguais.

4. Prove que a média quadrática de $n$ números positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é sempre maior que ou igual a sua média aritmética e só é igual quando todos os números são iguais.

5. Prove que se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números positivos e $b_1, b_2, \ldots, b_n$ é uma reordenação de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ então $\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_n}{a_n} \geq n$.

6. Prove que $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, para qualquer $x$, $y$ e $z$ reais.

7. Prove que $\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt{\frac{a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3}{3}} \geq \sqrt[3]{a_1a_2a_3}$, se $a_1$, $a_2$, $a_3$ positivos.

8. Mostre que se a equação $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, na qual $a$, $b$ e $c$ são números positivos possuir três raízes reais $a^6 \geq 27b^3 \geq 729c^2$.

9. Um mágico se apresenta usando um paletó cintilante e uma calça colorida e não repete em suas apresentações o mesmo conjunto de calça e paletó. Para poder se apresentar em 500 espetáculos, qual o menor número de peças de roupa que pode ter seu guarda-roupa?

10. Prove que entre todos os triângulos de perímetro constante, o equilátero é o de maior área.

11. a) Prove que, se é positivo, então $x + \frac{1}{x} \geq 2$.
    b) Qual o valor mínimo de $x + \frac{4}{x}$, $x$ positivo?

12. Prove que a seqüencia de termo geral $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é estritamente crescente, isto é, prove que, para todo $n$ inteiro e positivo $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$.

13. Prove que se $x$, $y$ e $z$ são positivos, então

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x + y + z}.$$

14. Prove que se $x$, $y$ e $z$ são positivos, então

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2 \geq 9\sqrt[3]{xyz}.$$

15. Se $x$, $y$ e $z$ são números reais positivos tais que $1 \leq xy + yz + xz \leq 3$. qual é o conjunto de valores de $xyz$? E de $x + y + z$?

16. Se $x$, $y$ e $z$ são números reais positivos tais que $xy + yz + zx \leq 3$, qual é o conjunto de valores de $xyz$? E de $x + y + z$?

17. Se $x$, $y$ e $z$ são números reais positivos tais que $xy + yz + zx \leq 1$, qual é o conjunto de valores de $xyz$? E de $x + y + z$?

18. Se $x$, $y$ e $z$ são números reais positivos tais que $1 \leq x + y + z \leq 3$, qual é o conjunto de valores de $xyz$? E de $xy + yz + zx$?

19. Se $x$, $y$ e $z$ são números reais positivos tais que $1 \leq xyz \leq 3$, qual é o conjunto de valores de $xy + yz + zx$? E de $x + y + z$?

20. Se $x$, $y$ e $z$ são números reais positivos tais que $xyz = 8$, qual é o conjunto de valores de $xy + yz + zx$? E de $x + y + z$?

21. Prove que, se a desigualdade das médias é válida para $m$ números positivos, $m > 2$, então ela é valida também para $m - 1$ números positivos.

## 6.2 Soluções

### Seção 6.1

1. Os tempos de percurso são $t_1 = \dfrac{d}{2v_1}$ e $t_2 = \dfrac{d}{2v_2}$. Logo, a velocidade média é $v_m = \dfrac{d}{t_1 + t_2} = \dfrac{d}{\frac{d}{2v_1} + \frac{d}{2v_2}} = \dfrac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$, que é a média harmônica das velocidades $v_1$ e $v_2$ na ida e na volta.

2. A distancia total percorrida é $d = tv_1 + tv_2$. Logo, a velocidade média é $v_m = \dfrac{tv_1 + tv_2}{2t} = \dfrac{v_1 + v_2}{2}$, que é a média aritmética das velocidades $v_1$ e $v_2$ nas duas partes do percurso.

3. Após as duas décadas, a população é multiplicada por $1,44 \times 1,21$. A taxa média $i$ de crescimento decenal é a taxa que, mantendo-se constante para as duas décadas, produza o mesmo crescimento total. Logo, devemos ter $(1+i)^2 = 1,44 \times 1,21$, Logo, $1+i = \sqrt{1,44}\sqrt{1,21} = 1,2 \times 1,1 = 1,31$. Portanto, a taxa média de crescimento decenal é $0,32 = 32\%$.

4. Do mesmo modo, a taxa média anual de crescimento $i$ é tal que, aplicada a cada ano, produza o mesmo crescimento total. Logo, devemos ter $(1+i)^{20} = 1,44 \times 1,21 = 1,7424$. Daí, $1+i = \sqrt[20]{1,7424} = 1,0282$ e a taxa média anual de crescimento é $1,0282 = 2,82\%$.

6. Em 1/3 dos casos, os prisioneiros levem 3 horas para escapar; em outro 1/3, levam 5 horas; no 1/3 restante gastam 9 horas para retornar ao ponto de partida. Esses últimos, agora, escolhem um dos dois outros túneis. Assim, 1/6 dos prisioneiros levam $9+3 = 12$ horas para escapar e o restante 1/6 levam $9+5 = 14$ horas. O tempo médio para escapar é, portanto, $\frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 12 + \frac{1}{6} \cdot 14 = 7$ horas.

7. Seja $M$ o tempo médio para escapar. Em 1/3 dos casos, os prisioneiros levam 3 horas para escapar; em outro 1/3, levem 5 horas; no 1/3 restante gastam 9 horas para retornar ao ponto de partida, do qual precisam, em média, de um tempo adicional $M$ para escapar. Logo, temos: $M = \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot (9+M)$. Resolvendo a equação, encontramos $M = 8,5$ horas.

8. Cada um dos $n$ números $a_i$ satisfaz $m \le a_i \le M$ e, portanto, $nm \le \sum_{i=1}^{n} a_i \le nM$. Dividindo por $n$, vem $m \le \bar{x} \le M$.

9. Cada um dos $n$ números $a_i$ satisfaz $m \le a_1 \le M$ e, portanto, $m^n \le \prod_{i=1}^{n} a_i \le M^n$ (já que todos os números envolvidos são positivos). Extraindo a raiz $n$-ésima, vem $m \le g \le M$.

10. Cada um dos $n$ números $a_i$ satisfaz $m \le a_i \le M$. Como cada um deles é positivo, tem-se $\frac{1}{m} \ge \frac{1}{a_i} \ge \frac{1}{M}$ e, daí, $\frac{n}{m} \ge \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \ge nM$. Portanto, $\frac{m}{n} \ge \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}} \ge nM$. Finalmente, multiplicando por $n$, vem $m \le h \le M$.

11. Não. Depende dos pesos atribuídos as duas provas. Se, por exemplo, Português tiver peso 4 e Matemática peso 1, João terá 27 pontos e Pedro 28.

12. a) Se um pneu roda $x$ mil quilômetros em uma roda dianteira e $y$ mil quilômetros em uma roda traseira, a fração do pneu que gasta é $\frac{x}{40} + \frac{y}{60}$. Para conseguir a rodagem máxima sem trocar pneus, todos os pneus devem gastar totalmente ao mesmo tempo (ou seja, esta fração deve ser igual a 1 ao final do processo para cada pneu). Portanto, cada um deles deverá rodar o mesmo número de quilômetros em uma roda dianteira e uma roda traseira, ou seja $x = y$. Logo, deve-se ter $\frac{x}{40} + \frac{y}{60} = 1$, de onde resulta $x = 24$. Logo, cada pneu deve rodar 24 mil quilômetros em uma roda dianteira e 24 mil quilômetros em uma roda traseira. Portanto, o carro pode rodar 48 mil quilômetros com um jogo de 4 pneus, bastando para isto trocar os pneus traseiros pelos dianteiros aos 24 mil quilômetros.

    b) Do mesmo modo, cada pneu deve rodar 24 mil quilômetros em uma roda traseira e 24 mil quilômetros em uma roda dianteira. Mas como agora temos 5 pneus, o carro pode rodar por 5/4 de 48 mil quilômetros, ou seja, por 60 mil km. Para tal, basta fazer um rodízio dos pneus a cada 12 mil km. Por exemplo, começando com ABCDE (com A e B na dianteira, C e D na traseira e E no estepe), passar para BCDEA, CDEAB, DEABC e EABCD).

    c) O resultado em a) é igual a $\frac{2}{\frac{1}{40.000}+\frac{1}{60.000}}$. Logo, é a média harmônica de 40.000 e 60.000.

13. A nova média é $\frac{50 \cdot 40 - 125 - 75}{48} = 37,5$.

14. A média quadrática conserva a soma dos quadrados dos números.

15. Cada um dos $n$ números $a_i$ satisfaz $m \leq a_i \leq M$, ou seja, $m^2 \leq a_i^2 \leq M^2$. Logo, $nm^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \leq nM^2$, ou seja, $m^2 \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{n} \leq M^2$. Daí, finalmente, $m \leq q \leq M$.

16. $A - G = \frac{x_1+x_2}{2} - \sqrt{x_1 x_2} = \frac{(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2}{2}$. Portanto, $A - G \geq 0$, com igualdade se e somente se $x_1 = x_2$. Aplicando este resultado aos inversos de $x_1$ e $x_2$, temos $\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}}$. Ou seja, temos $\frac{1}{H} \geq \frac{1}{G}$, que é equivalente a $H \leq G$; a igualdade ocorre se e somente se $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2}$, ou seja, quando $x_1 = x_2$.

17. A média aritmética dos erros é necessariamente igual a 0, já que $\sum_{i=1}^n (a_i - m) = (\sum_{i=1}^n a_i) - nm = nm - nm = 0$.

18. Deseja-se encontrar $x$ de modo que seja mínimo $f(x) = \sum_{i=1}^{n}(x - x_i)^2 = nx^2 - 2(\sum_{i=1}^{n} x_i)x + \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, que é uma função quadrática de $x$. Esta função atinge seu valor mínimo para $x = -\frac{b}{2a} = \frac{2\sum_{i=1}^{n} x_i}{2n} = \bar{x}$

19. Deseja-se encontrar $x$ de modo que seja mínimo $f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - x_i| = |x - x_1| + |x - x_2| + \cdots + |x - x_n|$. Há dois casos a considerar. Quando $n$ é ímpar, $f(x)$ é decrescente para $n$ menor que o termo central $x_{(n+1)/2}$ e decrescente para $x$ maior que este termo. Logo, atinge o seu valor mínimo neste ponto, que é a mediana dos números $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Quando $n$ é par, $f(x)$ é crescente para $x < x_{n/2}$, constante para $x_{n/2} < x < x_{n/2+1}$ e crescente para $x > x_{n/2+1}$. Logo, o valor mínimo de $f$ ocorre para todo valor de $x$ entre as observações centrais.

20. a) Os pontos seriam colineares se e somente se os incrementos em $y$ fossem os mesmos para cada incremento de 1 unidade em $x$, o que não ocorre.

b) Para a reta 1, o erro médio quadrático é:
$e_1 = \frac{(580-820)^2+(980-1000)^2+(1190-1200)^2+(1360-1350)^2+(1350-1550)^2}{5} = 380$
Para a reta 2, o erro médio quadrático é:
$e_1 = \frac{(800-820)^2+(980-1000)^2+(1160-1200)^2+(1340-1350)^2+(1520-1550)^2}{5} = 680$
Logo, a primeira reta produz o menor erro quadrático.

c) Consideremos uma reta de equação $y = ax + b$. A soma dos erros quadráticos é

$$\begin{aligned} S =&(b - 820)^2 + (a + b - 1000)^2 + (2a + b - 1200)^2 \\ &+ (3a + b - 1350)^2 + (4a + b - 1550)^2 \\ =&30a^2 + 20ab + 5b^2 - 27300a - 11840b + 7337400. \end{aligned}$$

Podemos escrever esta soma como:

$$S = 30\left(a + \frac{b}{3} - 455\right)^2 + \frac{5}{3}(b - 822)^2 + 510$$

Logo, $S$ é mínimo quando $a + \frac{b}{3} - 455 = 0$ e $b - 822 = 0$, ou seja, quando $b = 822$ e $a = 181$. Portanto, a reta pedida tem equação $y = 181x + 822$.

21. Existem 7 restos possíveis quando se divide um número por 7. Assim, tomando os restos como gavetas e os números como objetos, pode-se garantir que alguma

gavetas conterá dois (ou mais) objetos. Isto é, há pelo menos dois números que deixam o mesmo resto quando dividimos por 7, o que é equivalente a dizer que a diferencia entre eles é um múltiplo de 7.

22. A mesma pode ser colocada em 20 posições diferentes. Seja $a_i$ ($i = 1, \ldots, 20$) o número de crianças cuja preferência é atendida com a mesa na posição $i$. Então $a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}$ é o número total de preferências atendidas. Mas cada sorvete é colocado, sucessivamente, em frente a cada criança. Como há exatamente 10 crianças que preferem cada sabor, o número total de preferências atendidas por cada sorvete é 20, para um total de 200 preferências atendidas. Assim, temos $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Como a média de $a_1, \ldots, a_{20}$ é 10, conclui-se que pelo menos um dos números é maior ou igual a 10 (ou seja, há alguma posição em que pelo menos 10 crianças são atendidas).

23. Em uma reunião com $n$ pessoas, cada pessoa pode ter de 0 a $n-1$ conhecidos. No entanto, é impossível que, ao mesmo tempo, haja uma pessoa que não tenha conhecidos e outra que conheça todos (a final, estas duas pessoas se conhecem ou não?). Portanto, em qualquer situação há apenas $n$ - 1 valores possíveis para o número de conhecidos, o que implica que pelo menos duas das $n$ pessoas têm o mesmo número de conhecidos.

24. Como no exemplo 7, considere os restos da divisão por 1997, dos números 1, 11, 111, .... Como há apenas 1997 restos possíveis, necessariamente há dois restos coincidentes. Tomando a diferença dos dois números da forma $11\ldots1$ resulta a existência de um número da forma $11\ldots10\ldots0 = 11\ldots1 \times 10^k$ que é múltiplo de 1997. Como 1997 e 10 são primos entre si, o número da forma $11\ldots1$ acima é necessariamente múltiplo de 1997.

25. Deve haver 73 pessoas. Podemos distribuir até 72 pessoas de modo que haja exatamente 6 nascidas em cada mês. Com 73 pessoas, necessariamente um dos meses (gavetas) conterá 7 ou mais pessoas (objetos).

26. As paridades das coordenadas dos pontos de coordenadas inteiras do plano determinam 4 gavetas: par-par, par-ímpar, ímpar-par e ímpar-ímpar. Dados 5 pontos, pelo menos uma das gavetas contém dois pontos. Ou seja, há um par de pontos em que ambas as coordenadas têm a mesma paridade, o que faz com que o ponto médio tenha coordenadas inteiras.

27. Seja $a_i$, $i = 1, \ldots, N$, o número de objetos em cada gaveta, Então $a_1 + \cdots + a_N = Nk + 1$, ou seja, a média aritmética de $a_1, \ldots, a_N$ é $k + \frac{1}{N}$. Como a média dos números inteiros $a_1, \ldots, a_N$ é maior do que $k$, resulta que pelo menos um deles é maior do que $k$.

28. As 4 primeiras questões da prova podem ser respondidas de $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$ modos (gavetas) diferentes. Como são 40100 candidatos, o número médio de candidatos para cada possível padrão de resposta é $\frac{40100}{625} = 64,16$. Pode-se garantir, em conseqüência, que uma das gavetas contém 65 objetos; ou seja, pelo menos 65 candidatos respondem de modo idêntico às primeiras 4 questões. Este é o maior valor possível para $k$, já que é possível distribuir os candidatos de modo que haja no máximo 65 por cada padrão de resposta.

29. As primeiras $k$ questões podem ser respondidas de $5^k$ modos (gavetas). Para garantir que pelo menos 4 candidatos respondam a estas questões do mesmo modo, deve-se ter pelo menos $3 \times 5^k + 1$ candidatos (objetos). Portanto, deve-se ter $3 \times 5^k < 40100$, o que ocorre para $k \leq 5$. Portanto, o valor máximo possível para $k$ é 5.

30. Considere os pontos da reta com coordenadas inteiras. Como há somente 11 cores disponíveis, dois deles têm a mesma cor.

31. O número de jogos de cada um dos $n$ times é um número inteiro de 0 a $n - 1$. Mas, como no exercício 23, não pode existir, simultaneamente, um time com 0 jogos e outro com $n - 1$ (eles já jogaram entre si ou não?). Logo, há apenas $n - 1$ gavetas para $n$ objetos, o que garante que dois times enfrentaram o mesmo número de adversários.

32. Dividamos o retângulo em 6 retângulos $1 \times 2$. Como há 7 pontos, há dois que estão no mesmo retângulo. A distancia entre eles é no máximo igual à diagonal do retângulo, que mede $\sqrt{5}$.

33. Como os números são escolhidos no conjunto 1, 2, ..., 15, os valores possíveis para a diferença de dois números são 1, 2, ..., 14 (ou seja, há 14 valores possíveis). Por outro lado, os oito números formam $C_8^2 = 28$ pares. Destes, no máximo 1 resulta em uma diferença igual a 14 (quando formado por 1 e 15). Em conseqüência, há pelo menos 27 pares cujas diferenças pertencem ao conjunto 1, 2, ..., 13. Como $27/13 > 2$, há uma gaveta (diferença) contendo

mais de dois objetos (pares). Portanto, há pelo menos três pares de números em que a diferença entre o maior e o menor número do par é a mesma.

34. a) Seja $\lambda_1 = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ e $\lambda_2 = \frac{x_2-x}{x_2-x_1}$. Então $\lambda_1$ e $\lambda_2$ são números positivos, já que $x - x_1$, $x_2 - x$ e $x_2 - x_1$ o são. Além disso, $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{x-x_1+x_2-x}{x_2-x_1} = 1$ e $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \frac{x^2-x_1x+x_2x-x^2}{x_2-x_1} = x$. Por outro lado, se $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = x$, com $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, então $\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1)x_2 = x$, de onde resulta $\lambda_1 = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ e $\lambda_2 = \frac{x_2-x}{x_2-x_1}$, mostrando que a solução é única.

   b) Se $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, com $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$, então $x$ é uma média ponderada, com pesos positivos, de $x_1$ e $x_2$. Logo, $x_1 < x < x_2$.

   c) Temos $x = x_1 + (\lambda_1 - 1)x_1 + \lambda_2 x_2 = x_1 + \lambda_2(x_2 - x_1)$. Mas $\lambda_1 > 1$ implica em $\lambda_2 < 0$. Logo, $x < x_1$, ou seja, $x \in (-\infty, x_1)$.

   d) Temos $x = x_2 + (1 - \lambda_2)x_2 + \lambda_1 x_1 = x_2 - \lambda_1(x_2 - x_1)$. Como $\lambda_1 < 0$, temos $x > x_2$, ou seja, $x \in (x_2, +\infty)$.

35. a) Utilizando o exercício anterior, $x$ pode ser escrito na forma $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_n x_n$ com $\lambda_1$ e $\lambda_n$ positivos e $\lambda_1 + \lambda_n = 1$. Ou seja, $x$ pode ser escrito na forma pedida com $\lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$. A representação não é única quando $n > 2$. Por exemplo, ainda usando o exercício anterior, todo $x$ também pode ser escrito na forma $\lambda_i x_i + \lambda_j x_j$, onde $i$ e $j$ são quaisquer índices tais que $x_i \leq x \leq x_j$. Se $n > 2$, certamente há mais de um modo de escolher $i$ e $j$.

   b) Basta observar que $x$ é uma media ponderada de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Como $x_1$ é o menor dos números e $x_n$ é o maior e os pesos são todos positivos, resulta que $x_1 < x < x_n$.

36. A altura média é $\frac{30 \cdot 1{,}75 + 10 \cdot 1{,}67}{40} = 1{,}73$.

## Seção 6.2

1. Se os números têm soma constante, sua média aritmética $A$ é também constante. Pela desigualdade das médias, o maior valor possível para a média geométrica $G$ é igual a $A$, o que ocorre quando os números são iguais. Logo, o produto dos números (que é o quadrado de $G$) é máximo quando os números são iguais.

2. Se os números têm produto constante, sua média geométrica $G$ é também constante. Pela desigualdade das médias, o menor valor possível para a média aritmética $A$ é igual a $G$, o que ocorre quando os números são iguais. Logo, a soma dos números (que é dobro de $A$) é mínima quando os números são iguais.

3. Da desigualdade das médias, temos $\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n} \le \sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{x_n}}$, ou seja, $\frac{1}{H} \ge \frac{1}{G}$. Daí, decorre, $H \le G$, com igualdade somente quando $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} = \cdots = \frac{1}{x_n}$, ou seja, quando todos os números são iguais.

4. Temos

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(x_k - A)^2 &= \sum_{k=1}^{n}(x_k)^2 - 2A\sum_{k=1}^{n} x_k + nA^2 \\ &= nQ^2 - 2A\cdot nA + nA^2 = n(Q^2 - A^2)\end{aligned}$$

Como uma soma de quadrados é necessariamente não negativa, resulta $Q^2 \ge A^2$ ou, equivalentemente, $Q \ge A$. Além disso, só se tem igualdade quando cada termo da soma inicial é nulo, ou seja, quando $x_k = A$, para todo $k$, o que significa que todos os números $x_k$ são iguais.

5. A média geométrica de $\frac{b_1}{a_2}, \frac{b_2}{a_2}, \ldots, \frac{b_n}{a_n}$ é $\sqrt[n]{\frac{b_1 b_2 \cdots b_n}{a_1 a_2 \cdots a_n}} = 1$ (note que os produtos no numerador e denominador são iguais, já que $b_1, b_2, \ldots, b_n$ são uma reordenação de $a_1, a_2, \ldots, a_n$). Logo, sua média aritmética é maior que ou igual a 1. Assim $\frac{\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\cdots+\frac{b_n}{a_n}}{n} \ge 1$ ou, equivalentemente, $\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_n}{a_n} \ge n$.

6. Aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica aos pares $(x^2, y^2)$, $(y^2, z^2)$ e $(z^2.y^2)$, vem

$$\frac{x^2+y^2}{2} \ge xy$$
$$\frac{y^2+z^2}{2} \ge yz$$
$$\frac{z^2+x^2}{2} \ge zx$$

Somando membro a membro vem a desigualdade pedida.

7. Aplicando a desigualdade das médias a $a_1a_2$, $a_2a_3$ e $a_3a_1$, resulta $\frac{a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1}{3} \le \sqrt[3]{a_1^2a_2^2a_3^2}$, que equivale a $\sqrt{\frac{a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1}{3}} \le \sqrt[3]{a_1a_2a_3}$.

A outra desigualdade é equivalente a $\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)^2 \geq \frac{a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1}{3}$, que, por sua vez, é equivalente a $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \geq a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$, que é verdadeira, pelo exercício anterior.

8. Se $x \leq 0$, então $x^3 - ax^2 + bx - c$ é uma soma de números não positivos na qual pelo menos $-c$ é negativo. Logo, se a equação $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ possui três raízes reais $x_1$, $x_2$, $x_3$, elas são necessariamente positivas. Usando as relações entre coeficientes e raízes, temos $a = x_1 + x_2 + x_3$, $b = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$ e $c = x_1x_2x_3$. Pelo exercício anterior, temos $\frac{a}{3} \leq \sqrt{\frac{b}{3}} \leq \sqrt[3]{c}$. Elevando à sexta potência e multiplicando por 729, vem $a^6 \geq 27b^3 \geq 729c^2$.

9. Com $x$ paletós e $y$ calças, podem ser formadas $xy$ roupas diferentes. O valor mínimo da soma de dois números com produto constante ocorre quando os números são iguais. Se $x$ pudesse assumir valores não inteiros, o mínimo ocorreria para $x = \sqrt{500} = 22,36$. Claramente, 44 roupas não bastam, porque o produto máximo de dois números com soma 44 é igual a $22 \times 22 < 500$. Mas 45 bastam, já que $22 \times 23 = 506$. Ou seja, o mágico pode usar trajes diferentes em todas as apresentações com 23 (ou 22) calças e 22 (ou 23) paletós.

10. Pela fórmula de Heron, a área de um triângulo de lados $a$, $b$ e $c$ é $S = \frac{1}{2}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Para triângulos de perímetro constante, a área máxima quando o produto $(p-a)(p-b)(p-c)$ é máximo. Mas a soma $(p-a)+(p-b)+(p-c)$ é igual a $p$, portanto constante. Logo, para que $(p-a)(p-b)(p-c)$ seja máximo deve-se $p-a = p-b = p-c$, ou seja, $a = b = c$. Logo, dentre os triângulos de perímetro constante, o equilátero é o de maior área.

11. a) A média geométrica de $x$ e $\frac{1}{x}$ é constante e igual a 1. Logo, sua média aritmética é sempre maior que ou igual a 1, isto é, $x + \frac{1}{x} \geq 2$, com igualdade quando os números são iguais (ou seja, quando $x = 1$).

    b) A média geométrica de $x$ e $4/x$ é constante e igual a $\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 2$. Em conseqüência, o valor mínimo da média aritmética é 2 e o valor mínimo de $x + \frac{4}{x}$ é 4, que ocorre quando $x = \frac{4}{x}$, ou seja, quando $x = 2$.

12. A média aritmética dos números $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1 + \frac{1}{n}$, $x_{n+1} = 1$ é $A = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$, enquanto a sua média geométrica é $G = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}}$. A desigualdade das médias fornece, portanto, $1 + \frac{1}{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}}$, que é

equivalente a $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (note que a desigualdade é estrita, já que os números $x_1, \ldots, x_n$ não são todos iguais).

13. Aplicando a desigualdade entre a média aritmética e a média harmônica aos números $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ e $\frac{1}{z}$ obtemos $\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}{3} \geq \frac{3}{x+y+z}$ ou, equivalentemente, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$.

14. Aplicando a desigualdade das médias aos números $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ e $\sqrt{z}$, vem $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{3} \geq \sqrt[3]{\sqrt{x}\sqrt{y}\sqrt{z}} = \sqrt{\sqrt[3]{xyz}}$.

15. Aplicando a desigualdade das médias aos números $xy$, $yz$ e $xz$, resulta $\frac{xy+yz+zx}{3} \geq \sqrt[3]{(xyz)^2}$. Como $xy+yz+zx \leq 3$, temos $xyz \leq \sqrt{\left(\frac{xy+yz+zx}{3}\right)^3} \leq 1$, com igualdade no caso $x = y = z = 1$. Por outro lado, com $x = y = \frac{1}{n}$ e $z = n$, temos $xy + yz + zx = 2 + \frac{1}{n^2}$ (portanto, $1 \leq xy + yz + zx \leq 3$) e $xyz = 1/n$, o que mostra que $xyz$ pode ficar arbitrariamente próximo a zero, bastando para isso tomar $n$ suficientemente grande. Portanto, o conjunto de valores de $xyz$ é o intervalo $(0, 1]$.

    Pelo problema 7, $x + y + z \geq 3\sqrt{\frac{xy+yz+zx}{3}} \geq \sqrt{3}$, com igualdade no caso $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (a última desigualdade decorre de $xy + yz + zx \geq 1$). Por outro lado, novamente tomando $x = y = \frac{1}{n}$ e $z = n$, temos $xy+yz+zx = 2+\frac{1}{n^2}$ (portanto, de novo, $1 \leq xy + yz + zx \leq 3$) e $x + y + z = n + \frac{2}{n}$, o que mostra que $x + y + z$ pode assumir valores arbitrariamente grandes. Logo, o conjunto de valores de $x + y + z$ é o intervalo $[\sqrt{3}, +\infty)$.

16. A desigualdade $xyz \leq 1$ continua válida e $xyz$ continua a poder assumir valores arbitrariamente próximos a zero (basta tomar, como antes, $x = y = \frac{1}{n}$ e $z = n$). Logo, o conjunto de valores de $xyz$ continua a ser o intervalo $(0, 1]$.

    Como antes, os valores de $x + y + z$ podem se tomar arbitrariamente grandes. Por outro lado, como foi removida a condição $xy + yz + zx \geq 1$, eles também podem se tomar arbitrariamente próximos de zero (por exemplo, tome $x = y = z = \frac{1}{n}$. Logo, o conjunto de valores de $x + y + z$ é o intervalo $(0, +\infty)$.

17. Como no problema 15, $xyz$ pode tomar valores arbitrariamente próximos de zero. Por outro lado, uma vez removida a restrição $xy + yz + zx \leq 3$, $xyz$ pode também se tomar arbitrariamente grande (por exemplo, tome $x = y = z = n$, com $n$ natural). Logo, o conjunto de valores de $xyz$ é o intervalo $(0, +\infty)$.

A desigualdade $x + y + z \geq \sqrt{3}$ do problema 15 continua a ser válida e, além disso, tomando $x = y = \frac{1}{n}$ e $z = n$ consegue-se fazer $x + y + z$ arbitrariamente grande. Logo, o conjunto de valores de $x + y + z$ continua sendo o intervalo $[\sqrt{3}, +\infty)$.

18. Pela desigualdade das médias, temos $\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$. Como $x + y + z \leq 3$, vem $xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 \leq 1$, com igualdade quando $x = y = z = 1$. Por outro lado, tomando $x = y = \frac{1}{n}$ e $z = 1$, temos $x + y + z = 1 + \frac{2}{n} \in [1, 3]$ e $xyz = \frac{1}{n^2}$. Logo $xyz$ pode assumir valores arbitrariamente próximos de zero. Portanto, o conjunto de valores de $xyz$ é o intervalo $(0, 1]$.

    Pelo problema 7, temos $xy+yz+zx \leq 3\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2$. Justamente com $x+y+z \leq 3$, isto fornece $xy + yz + zx \leq 3$, com igualdade quando $x = y = z = 1$. Por outro lado, tomando $x = y = \frac{1}{n}$ e $z = 1$, temos $x + y + z = 1 + \frac{2}{n} \in [1, 3]$ e $xy+yz+zx = \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$. Logo, $xy+yz+zx$ pode assumir valores arbitrariamente próximos de zero. Portanto, o conjunto de valores de $xy+yz+zx$ e o intervalo $(0, 3]$.

19. Como visto no problema 15, temos $\frac{xy+yz+zx}{3} \geq \sqrt[3]{(xyz)^2}$. Portanto, de $xyz \geq 1$ decorre $xy + yz + zx \geq 3$, com igualdade quando $x = y = z = 1$. Por outro lado, tomando-se $x = y = \frac{1}{n}$ e $z = n^2$, tem-se $xyz = 1$ e $xy+yz+zx = 2n+\frac{1}{n^2}$, que assume valores arbitrariamente grandes para $n$ natural. Logo, o conjunto de valores de $xy + yz + zx$ é o intervalo $[3, +\infty)$.

    Pela desigualdade das médias, $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$. Logo, de $xyz \geq 1$, resulta $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \geq 3$, com igualdade quando $x = y = z = 1$. Por outro lado, tomando-se $x = y = \frac{1}{n}$ e $z = n^2$, tem-se $xyz = 1$ e $x + y + z = n^2 + \frac{2}{n}$, que assume valores arbitrariamente grandes para $n$ natural. Logo, o conjunto de valores de $x + y + z$ é o intervalo $[3, +\infty)$.

20. Como visto no problema 15, $\frac{xy+yz+zx}{3} \geq \sqrt[3]{(xyz)^2}$. Portanto, de $xyz = 8$ decorre $xy + yz + zx \geq 12$, com igualdade quando $x = y = z = 2$. Por outro lado, tomando $x = y = \frac{2}{n}$ e $z = 2n^2$, vem $xyz = 8$ e $xy + yz + zx = 8n + 4n^2$, que pode assumir valores arbitrariamente grandes para $n$ natural. Logo, o conjunto de valores de $xy + yz + zx$ é o intervalo $[12, +\infty)$.

    Pela desigualdade das médias, $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$. Logo, de $xyz = 8$, resulta $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{8} = 6$, com igualdade quando $x = y = z = 2$. Por outro lado, tomando-se $x = y = \frac{2}{n}$ e $z = 2n^2$, tem-se $xyz = 8$ e $xy + yz + zx = 2n^2 + \frac{4}{n}$,

que assume valores arbitrariamente grandes para $n$ natural. Logo, o conjunto de valores de $x + y + z$ é o intervalo $[6, +\infty)$.

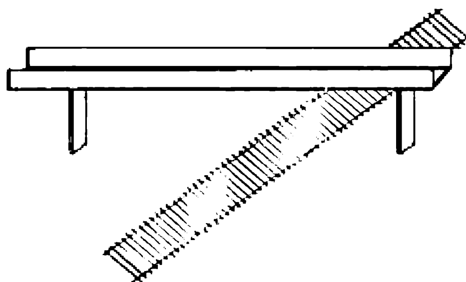
21. Sejam $A$ e $G$ as médias aritméticas e geométrica de $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$. Aplicando a desigualdade das médias aos $m$ números $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, A$, temos $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{m-1}+A}{m} \geq \sqrt[m]{a_1 a_2 \cdots a_{m-1} A}$, ou seja $\frac{(m-1)A+A}{m} \geq \sqrt[m]{G^{m-1}A}$. Daí, obtemos $A^m \geq G^{m-1}A$, ou seja, $A^{m-1} \geq G^{m-1}$ e, finalmente, $A \geq G$. Além disso, a igualdade ocorre somente quando $a_1 = a_2 = \cdots = a_{m-1} = A$.

# CAPÍTULO 7

## Pontos, Retas e Planos

### 7.1 Exercícios

1. A figura representa uma ponte sobre uma estrada de ferro. Sejam $\alpha$ e $\beta$, respectivamente, os planos da pista da ponte e o do leito da estrada de ferro e sejam $r$ e $s$ as retas que representam o eixo da pista e um dos trilhos. Quais são as posições relativas de $\alpha$, $\beta$, $r$ e $s$?



2. Quantos são os planos determinados por 4 pontos não coplanares?

3. Quantos planos distintos são determinados por um subconjunto dos vértices do paralelepípedo $ABCDEFGH$?

4. Qual a seção determinada em um paralelepípedo $ABCDEFGH$ pelo plano $ABG$?

5. Duas retas $r$ e $s$ são concorrentes em um ponto $O$. Fora do plano determinado por $r$ e $s$ tomamos um ponto $P$ qualquer. Qual é a intersecção do plano definido por $r$ e $P$ com o plano definido por $s$ e $P$?

6. Sejam $r$ e $s$ duas retas reversas, $A$ um ponto em $r$ e $B$ um ponto em $s$. Qual é a intercessão do plano $\alpha$ definido por $r$ e $B$ com o plano $\beta$ definido por $s$ e $A$?

7. Sejam $r$ e $s$ duas retas reversas. Sejam $A$ e $B$ pontos distintos de $r$ e $C$ e $D$ pontos distintos de $s$. Qual é a posição relativa das retas $AC$ e $BD$?

8. Sejam $r$ e $s$ duas retas reversas e $P$ um ponto qualquer do espaço. Diga como obter:

   a) um plano contendo $r$ e paralelo a $s$;

   b) um par de planos paralelos contendo $r$ e $s$, respectivamente;

   c) uma reta passando por $P$ e se apoiando em $r$ e $s$.

9. Seja $r$ uma reta secante a um plano $\alpha$ e $P$ um ponto exterior a $\alpha$. É sempre possível traçar uma reta que passa por $P$, encontra $r$ e é paralela a $\alpha$?

10. Se dois planos são paralelos a uma reta estão eles são paralelos entre si. Certo ou errado?

11. Sejam $A$, $B$, $C$ e $D$ pontos quaisquer do espaço (não necessariamente coplanares). Sejam $M$, $N$, $P$ e $Q$ os pontos médios de $AB$, $BC$, $CD$ e $DA$, respectivamente. Mostre que $MNPQ$ é um paralelogramo. Use este fato para demonstrar que os três segmentos que unem os pontos médios das arestas opostas de um tetraedro qualquer $ABCD$ se encontram em um mesmo ponto.

12. Suponha que os planos $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ têm exatamente um ponto em comum. Existe uma reta que seja simultaneamente paralela a $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$?

13. Sejam $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ três planos distintos. Mostre que as posições relativas possíveis dos planos são:

a) Os três planos são paralelos.

b) Dois deles são paralelos e o terceiro é secante a ambos. cortando-os segundo retas paralelas.

c) Os três planos se cortam segundo uma reta.

d) Os três planos se cortam dois a dois segundo três retas paralelas.

e) Os três planos se cortam dois a dois segundo três retas concorrentes; o ponto comum às três retas é o único ponto comum aos três planos.

14. Seja $ABCD$ um paralelogramo. Pelos vértices $A$, $B$, $C$ e $D$ são traçadas retas não contidas no plano $ABCD$ e paralelas entre si. Um plano $\alpha$ corta estas retas em pontos $A'$, $B'$, $C'$ e $D'$, situados no mesmo semi-espaço relativo ao plano de $ABCD$, de modo que $AA' = a$, $BB' = b$, $CC' = c$ e $DD = d$. Mostre que $a + c - b + d$.

15. Por um ponto qualquer da aresta $AB$ de um tetraedro qualquer $ABCD$ é traçado um plano paralelo às arestas $AC$ e $BD$. Mostre que a seção determinada por este plano no tetraedro é um paralelogramo.

16. Considere um paralelepípedo $ABCDEFGH$. Quais são as diversas formas possíveis para uma seção determinada no sólido por um plano contendo a aresta $AB$?

17. Seja $ABCDEFGH$ um paralelepípedo tal que $AB = AD = AE = 6$. Estude as seções determinadas deste paralelepípedo pelos planos definidos pelos ternos de pontos $(M, N, P)$ abaixo:

a) $M = A$, $N =$ ponto médio de $CG$ e $P =$ ponto médio de $DH$

b) $M = A$, $N = C$, $P =$ ponto médio de $FG$

c) $M = A$, $N =$ ponto médio de $CG$ e $P =$ ponto médio de $FG$

d) $M =$ ponto médio de $AE$, $N -$ ponto médio de $BC$, $P =$ ponto médio de $GH$

18. Mostre que duas retas distintas paralelas a uma mesma reta são paralelas entre si.

19. Mostre que, por um ponto dado, passa um único plano paralelo a um plano dado.

20. Sejam $r$ e $s$ do espaço concorrentes em $P$. Sejam $r'$ e $s'$ paralelas a $r$ e $s$, respectivamente, traçadas por um ponto $Q$. Mostre que os ângulos formados por $r$ e $s$ são iguais aos ângulos formados por $r'$ e $s'$.

21. Considere dois planos $\alpha$ e $\beta$. Qual é o lugar geométrico dos pontos médios dos segmentos cujos extremos estão em $\alpha$ e $\beta$, respectivamente? Examine todas as possíveis posições relativas de $\alpha$ e $\beta$.

22. Dada uma reta $r$ secante ao plano $\alpha$ e um ponto $P$ exterior a $r$ e a $\alpha$, diga como construir um segmento cujos extremos estão em $r$ e $\alpha$ cujo ponto médio seja $P$.

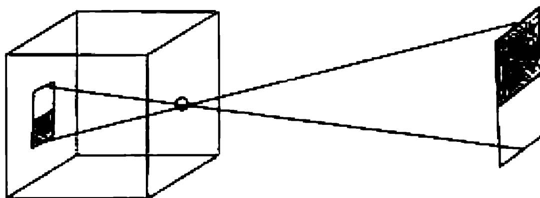
23. Dadas as retas reversas duas a duas $r$, $s$ e $t$, encontrar uma reta que as encontre nos pontos $R$, $S$ e $T$, respectivamente, de modo que $S$ seja ponto médio de $RT$.

24. Uma câmera fotográfica rudimentar pode ser construída fazendo um pequeno furo em uma caixa, de modo que imagens de objetos sejam formadas na parede oposta e registrada em um filme, como ilustrado na figura abaixo.

    Suponha que a câmera da figura tenha 10 cm de profundidade

    a) Que dimensões terá a fotografia de uma janela de 3 m de comprimento a 1,5 m de largura, paralela ao plano do filme e situada a 6 m da câmera?

    b) Se uma pessoa tem 1,75 m de altura e o firma usado é de 35 mm × 25 mm, que que distancia mínima da câmera a pessoa deverá ficar pàra que possa ser fotografada de corpo inteiro?



25. Verifique, através de um exemplo, que dois poliedros com arestas respectivamente proporcionais não são necessariamente semelhantes. Mostre, porém que dois tetraedros de arestas respectivamente proporcionais são semelhantes.

26. A que distância da base de uma pirâmide de altura $h$ deve ser conduzido um plano paralelo de modo que a área da seção determinada seja metade da área da base?

## 7.2 Soluções

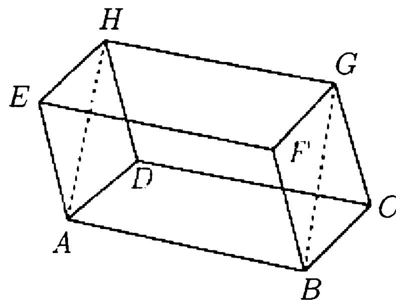
1. Supondo que, neste trecho, tanto a ponte quanto a via férrea estejam em planos horizontais (sem rampa), temos as seguintes relações: $\alpha$ e $\beta$ são paralelos; $r$ está contida em $\alpha$ e é paralela a $\beta$, enquanto $s$ será contida em $\beta$ e é paralela a $\alpha$; $r$ e $s$ são reversas.

   É possível também que os planos das duas estradas não sejam paralelos (por exemplo, se a estrada no plano horizontal mas a ferrovia estiver em um trecho de rampa). Neste caso, temos as seguintes relações: $\alpha$ e $\beta$ são secantes; $r$ está contida em $\alpha$ e é secante a $\beta$, enquanto $s$ está contida em $\beta$ e é secante a $\alpha$; $r$ e $s$ são reversas.

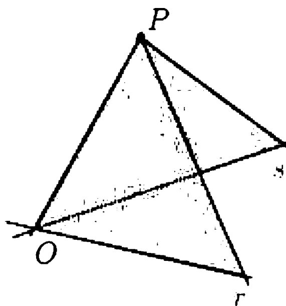
2. Cada 3 pontos determinam um plano. Logo, há um total de $C_4^3 = 4$ planos (que correspondem às faces do tetraedro cujos vértices são estes 4 pontos).

3. Há planos de dois tipos: faces do paralelepípedo, planos determinados por duas arestas paralelas opostas e planos determinados por três vértices que não determinam nenhuma aresta. São 6 planos do primeiro tipo (já que são 6 faces), 6 do segundo (já que há 6 pares de arestas opostas) e 8 do terceiro (um para cada vértice do cubo), para um total de 20 planos. Outra solução: No entanto, 12 destes planos contêm 4 vértices: as 6 faces e os 6 planos determinados por duas arestas opostas. Estes são, portanto, contados 4 vezes cada. Logo, dos 56 planos devem ser descontados $12 \times 3 = 36$ planos, resultando em $56 - 36 = 20$ planos.

4. O plano determinado por $AB$ e $G$ contém a reta passando por $G$ e paralela a $AB$; portanto, ele contém a aresta $GH$, oposta a $AB$. Logo, a seção é o paralelogramo determinado por estas duas arestas.



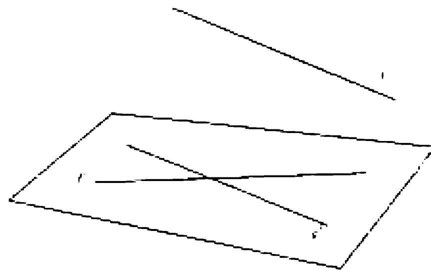

5. Os pontos $O$ e $P$ são comuns aos dois planos. Logo, sua interseção é a reta determinada por eles dois pontos.



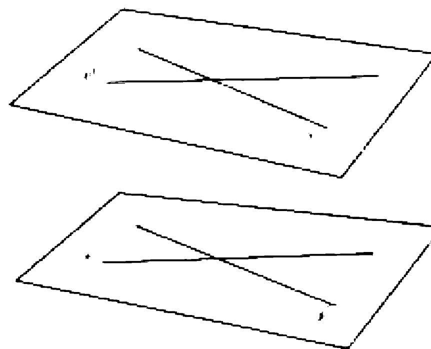

6. O ponto $A$ pertence tanto a $\alpha$ (já que $A \in r$) quanto a $\beta$ (que é definido passando por $A$). Do mesmo modo, $B$ também pertence a $\alpha$ e $\beta$. Logo, a interseção dos dois planos (que são distintos) é justamente a reta definida por $A$ e $B$.

7. Se as retas $AC$ e $BC$ fossem coplanares, isto significa que os pontos $A$, $B$, $C$ e $D$ seriam coplanares, ou seja, as retas $r$ e $s$ seriam coplanares, o que contradiz o fato de serem reversas. Logo, $AC$ e $BD$ são reversas.

8. a) Basta conduzir uma reta $s'$ paralela a $s$ por um ponto qualquer de $r$; o plano definido por $r$ e $s'$ contém $r$ e é paralelo a $s$, já que contém uma reta paralela a $s$.



b) Basta repetir a construção acima trocando o papel de $r$ e $s$; o nôvo plano e obtido em a) contêm $s$ e $r$, respectivamente, e são paralelos, por possuírem, cada um, um par de retas concorrentes paralelas ao outro.



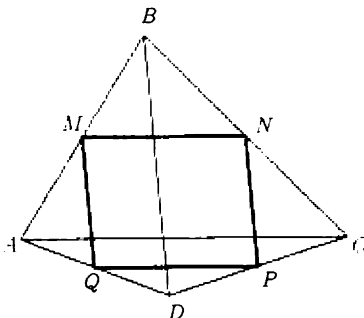
c) Basta tomar o plano definido por $r$ e $P$, que encontra $s$ no ponto $Q$. A reta $PQ$ encontra $r$ e $s$. (É necessário supor que o ponto $P$ não está em nenhum dos dois planos obtidos em b))

9. Sim. Se $P$ pertence a $r$, há uma infinidade de retas nestas condições (todas as retas passando por $P$ do plano conduzido por $P$ e paralelo a $\alpha$). Se $P$ não pertence a $r$, existe exatamente uma reta cumprindo as condições dadas, obtida conduzindo por $P$ um plano paralelo a $\alpha$, que intersecta $r$ em $Q$; a reta $PQ$ é a reta pedida.

10. Errado. Dois planos secantes são paralelos a uma reta paralela à sua reta de interseção, conduzida por um ponto exterior a ambos.

11. No triângulo $ABC$, $MN$ liga os pontos médios dos lados $AB$ e $BC$. Logo, $MN$ é paralelo a $AC$. Analogamente, $PQ$ também é paralelo a $AC$ e $MQ$ e

$PN$ são paralelos a $BD$. Portanto, no quadrilátero $MNPQ$ os lados opostos são paralelos, o que mostra que $MNPQ$ é um paralelogramo.




Consideremos agora o tetraedro de vértices $A$, $B$, $C$ e $D$. Os segmentos $MP$ e $NO$, que conectam os pontos médios de duas arestas opostas, são diagonais de um paralelogramo e, portanto, se cortam ao meio. Do mesmo modo, os pontos médios $R$ e $S$ das arestas $AC$ e $BD$ formam, justamente com $M$ e $P$, um paralelogramo. Logo $RS$ e $MP$ também se cortam ao meio. Portanto, os pontos médios dos 3 pares de arestas opostas determinam segmentos que se cortam ao meio.

12. Não. Uma reta simultaneamente paralela a dois planos secantes é paralela à sua reta de interseção. Para que a reta fosse simultaneamente paralela a três planos seria necessário que as retas de interseção de cada par de planos fossem paralelas ou coincidentes; neste caso, porém, os planos não se cortariam em um ponto.

13. Os planos $\alpha$ e $\beta$ podem ser paralelos ou secantes. No primeiro caso, o plano $\gamma$ pode ser:

   a) paralelo a ambos, determinando assim três planos paralelos; ou

   b) secante a eles, contando-os, portanto, segundo retas paralelas.

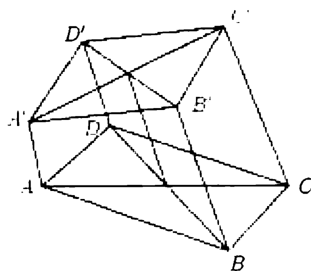
   Caso $\alpha$ e $\beta$ sejam secantes, há três posições possíveis para $\gamma$ com relação à reta $r$ de interseção de $\alpha$ e $\beta$:

   c) $\gamma$ contém $r$; neste caso, $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ se cortam segundo uma reta; ou

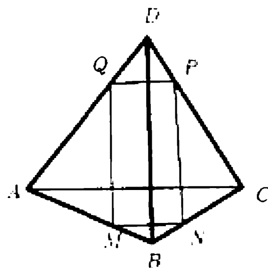
   d) $\gamma$ é paralela a $r$; neste caso, ou $\gamma$ é paralelo a um dos planos $\alpha$ ou $\beta$ (resultando na situação $\beta$ acima) ou intersecta cada um deles segundo retas paralelas a $r$; ou

e) $\gamma$ é secante a $r$; neste caso, os três planos tem exatamente um ponto em comum, que é exatamente o ponto em que $\gamma$ intersecta $r$.

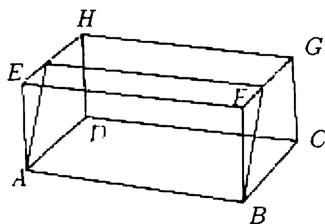
14. O ponto que une o ponto de encontro das diagonais de $ABCD$ e $A'B'C'D'$ é a base média dos trapézios $AA'C'C$ e $BB'D'D$. Logo $\frac{a+c}{2} = \frac{b+d}{2}$.



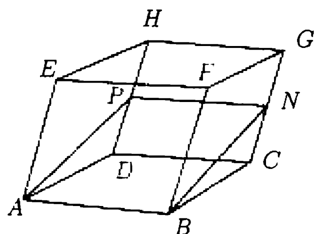

15. Como o plano é paralelo a $BD$, sua interseção $MQ$ com a face $ABD$ (que contém a reta $BD$) é paralela a $BD$. Analogamente, $NP$ também é paralela a $CD$, enquanto $MN$ e $PQ$ são paralelos a $AB$. Logo, o quadrilátero $MNPQ$ é um paralelogramo, já que tem lados opostos paralelos.



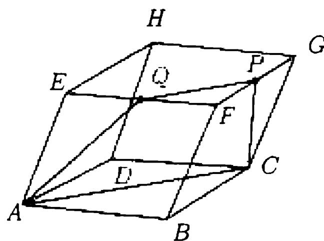

16. A seção é o segmento de reta $AB$, caso o plano não corte as demais faces ou é um paralelogramo. Neste caso, o lado oposto de $AB$ pode ser uma das arestas paralelas $CD$, $EF$, $GH$ ou, ainda, pode ser uma paralela a elas contida nos planos $CDFE$ ou $EFHG$.



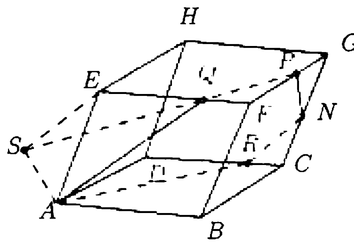

17. a) A seção é um paralelogramo



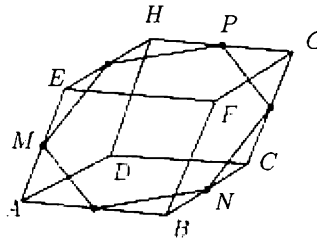

b) O plano corta o plano da face $EFGH$ segundo uma paralela à diagonal $AC$, ou seja, segundo a reta que liga os pontos $P$ e $Q$, médios de $FG$ e $EF$. A seção é um trapézio.




c) Conhece-se o segmento $PN$ em que o plano intersecta a face $BFGC$. A interseção com face paralela $ADHE$ ocorre segundo uma paralela a $PN$. Portanto, a aresta $EH$ é intersectada em seu prolongamento, em um ponto $S$ tal $ES = EH$. Ligado este ponto a $P$ determina-se o ponto $Q$ em que o plano corta a aresta $EF$ (por semelhança de triângulos, o ponto $Q$ é tal que $FQ = 2$. Agora, podemos encontrar a interseção com a face $ABCD$, que deve ser paralela a $PQ$. Logo, a aresta $CD$ é cortada em um ponto $R$ tal que $RC = 2$. A seção é o pentágono $ARNPQ$.




d) A seção é um hexágono que passa pelo ponto médio de seis das arestas do cubo.

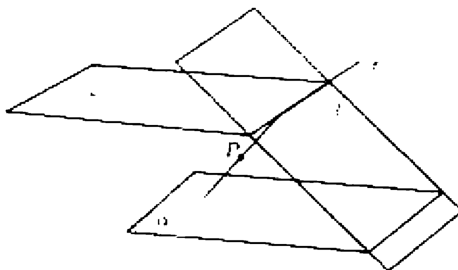



18. Sejam $r$ e $s$ retas paralelas e um ponto $A$ qualquer não pertence a elas. Vamos mostrar que os planos $\alpha$ e $\beta$ determinados por $r$ e $A$ e por $s$ e $A$ se intersectam segundo uma reta $t$ que é simultaneamente paralela a $r$ e a $s$ (isto mostra que uma reta distinta de $r$ e $s$ que seja paralela a uma das retas $r$ e $s$ é necessariamente paralela à outra). Suponhamos que $t$ intersecte o plano $\gamma$, determinado por $r$ e $s$, em um ponto $Q$. Como $t$ está contida em $\alpha$ e a reta de interseção de $\alpha$ e $\gamma$ é $r$, resulta daí que $Q$ pertence a reta $r$. Mas o mesmo argumento aplicado à reta $r$ mostra que $Q$ também pertence à reta $s$, o que contradiz o fato de que $r$ e $s$ serem paralelas. Logo, $t$ é paralela ao plano $\gamma$, o que mostra que $t$ tem interseção vazia com $r$ e com $s$. Como $t$ é coplanar com cada uma destas retas, resulta daí que $t$ é paralela a ambas.

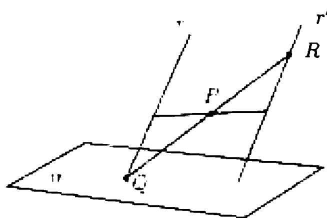
19. A existência do plano foi provada no texto. Para a demonstração da unicidade, suponhamos que existisse planos distintos $\beta_1$ e $\beta_2$ passando por $A$, ambos paralelos a um plano $\alpha$. Como os planos são distintos e têm um ponto comum, sua interseção é uma reta $r$, paralela a $\alpha$. Tomemos uma reta $s$ em $\alpha$, não paralela a $r$, que determina com $A$ um plano $\gamma$. A interseção de $\gamma$ e $\beta_1$ é uma reta $t$, necessariamente paralela a $s$ (já que $t$ e $s$ são coplanares e estão contidas em planos paralelos) e, portanto, diferente de $r$. Analogamente, a interseção

de $\gamma$ e $\beta_2$ é uma reta $u$, também paralela a $s$. Como $t$ e $u$ passam ambas por $A$, elas são coincidentes. Logo, $\beta_1$ e $\beta_2$ admitem, além de sua reta de interseção $r$, uma segunda reta comum $t = u$. Isto contradiz o fato de $\beta_1$ e $\beta_2$ serem distintos e prova a unicidade do plano paralelo.

20. Caso $\alpha$ e $\beta$ sejam paralelos, o lugar geométrico pedido é o plano paralelo a $\alpha$ e $\beta$ e eqüidistaste deles. Caso $\alpha$ e $\beta$ sejam secantes, o lugar geométrico pedido é todo o espaço: todo ponto do espaço é ponto médio de algum segmento com extremos em $\alpha$ e $\beta$. De fato, dado um ponto $P$ qualquer, basta tomar o plano $\gamma$, simétrico de $\alpha$ em relação a $\beta$ e obter a reta $r$ de interseção de $\gamma$ e $\beta$. O simétrico de todo ponto de $r$ em relação a $P$ é um ponto de *alpha*; logo, construímos uma infinidade de segmentos com extremos em $\alpha$ e $\beta$ tendo $P$ como ponto médio.

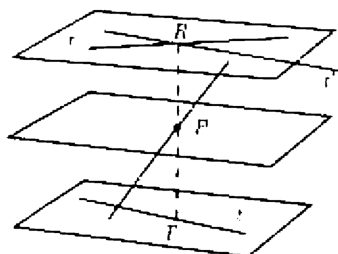


21. Basta tomar a reta $r'$, simétrica de $r$ em relação a $P$ e obter o ponto $Q$ de interseção de $r'$ com $\alpha$. O simétrico de $Q$ em relação a $P$ é o ponto $R$ sobre $r$; $RQ$ é o segmento pedido.




22. O Lugar geométrico dos pontos médios de todos os segmentos que se apóiam em $r$ e $t$ é um plano simultaneamente paralelo a $r$ e $t$. O ponto $S$ é o ponto

em que $s$ corta este plano. Para encontrar os extremos, basta achar a reta $t'$ simétrica de $t$ em relação a $S$, que corta $r$ em $R$. Finalmente, $T$ é o simétrico de $R$ em relação a $S$.




23. a) A imagem da janela é semelhante a ela, com razão de semelhança igual a razão entre as distancias do filme e da janela à lente. Assim o comprimento $c$ e a largura $l$ na imagem são tais que

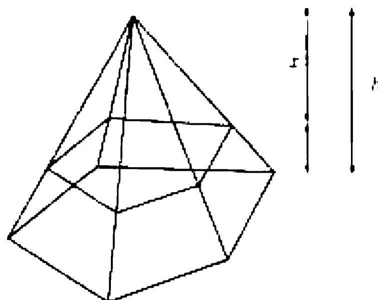
$\frac{c}{10cm} = \frac{3m}{6m}$; ou seja $c = 5cm$ e

$\frac{l}{10cm} = \frac{1m}{6m}$; ou seja $l = 1,66cm$.

b) Temos $\frac{3,5}{10cm} = \frac{1,75m}{d}$; logo a distancia mínima é $d = 5m$.

24. Um paralelepípedo oblíquo com arestas iguais não é semelhante a um cubo, que também tem arestas iguais (logo, proporcionais às do cubo). Um tetraedro, porém, fica completamente determinado por suas arestas. Se dois tetraedros têm arestas proporcionais, é sempre possível posicioná-los com um vértice comum, de modo que eles estejam associados por uma homotetia.

25. A distancia $x$ do plano de seção ao vértice deve satisfazer $\frac{x^2}{h^2} = \frac{1}{2}$. Logo, $x = h\frac{\sqrt{2}}{2}$ e a distancia do plano à base é $d = h - x = h\frac{2-\sqrt{2}}{2} \approx 0,29h$



# CAPÍTULO 8

## Perpendicularismo

### 8.1 Exercícios

1. É verdade que duas retas distintas ortogonais a uma terceira são sempre paralelas entre si?

2. Demonstre as seguintes propriedades:

   a) Seja $r$ uma reta perpendicular ao plano $\alpha$. Toda reta paralela a $r$ é perpendicular a $\alpha$; todo plano paralelo a $\alpha$ é perpendicular a $r$.

   b) Duas retas distintas perpendiculares ao mesmo plano são paralelas entre si. Dois planos distintos perpendiculares à mesma reta são paralelos entre si.

3. O triângulo $ABC$, retângulo em $A$, está contido em um plano $\alpha$. Sobre a perpendicular a $\alpha$ traçada por $C$ tomamos um ponto $D$. Por $C$ traçamos, por sua vez, as perpendiculares $CE$ e $CF$ a $AD$ e $BD$, respectivamente. Mostre que:

   a) $AB$ é perpendicular a $AD$

   b) $CE$ é perpendicular a $EF$

c) $DF$ é perpendicular a $EF$

4. Seja $r$ uma reta do espaço e $P$ um ponto exterior a $r$. Qual é o lugar geométrico dos pés das perpendiculares traçadas de $P$ aos planos que contém $r$?

5. Que poliedro tem por vértices os centros das faces de um tetraedro regular? de um cubo? de um octaedro regular?

6. Sejam $VA$, $VB$ e $VC$ três segmentos mutuamente perpendiculares. Mostre que a projeção de $V$ sobre o plano $ABC$ é ortocentro do triângulo $ABC$.

7. Mostre que dois planos são perpendiculares se e só se duas retas respectivamente perpendiculares a cada um deles são ortogonais.

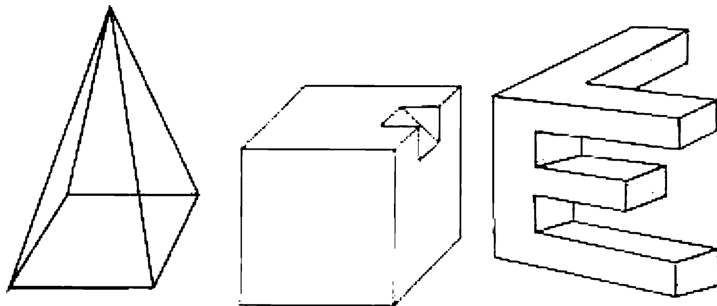
8. Se um plano $\alpha$ contém uma reta perpendicular a um plano $\beta$, então o plano $\beta$ contém uma reta perpendicular ao plano $\alpha$. Certo ou errado?

9. Dada uma reta $r$ e um plano $\alpha$, diga se é sempre possível construir um plano perpendicular a $\alpha$ contendo $r$.

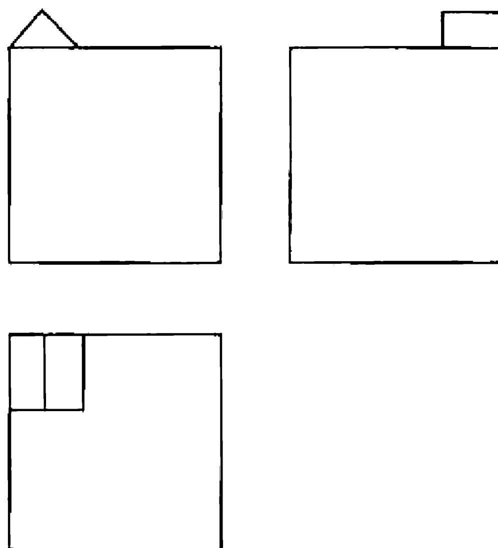
10. Mostre que um plano é perpendicular a dois planos secantes se e somente se ele é perpendicular à reta de interseção dos dois planos.

11. Em um cubo $ABCDEFGH$ mostre que os planos diagonais $ABHG$ e $EFDC$ são perpendiculares.

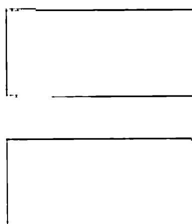
12. Desenhe as vistas frontal, superior e de perfil dos sólidos abaixo.



13. Desenhe um sólido cujas vistas frontal, superior e de perfil sejam as dadas a seguir.



14. A figura de abaixo representa as vistas frontal e superior de um sólido. Que sólidos você consegue imaginar que tenham essas vistas? Para cada caso, forneça a vista de perfil.



15. Dizemos que um plano $\alpha$ é um plano de simetria de uma figura $F$ quando a imagem de $F$ pela reflexão em torno de $\alpha$ é igual a $F$. Encontre os planos de simetria (se existirem) das seguintes figuras

    a) cubo

    b) tetraedro regular

    c) pirâmide quadrangular regular

    d) cilindro de revolução

e) cone de revolução

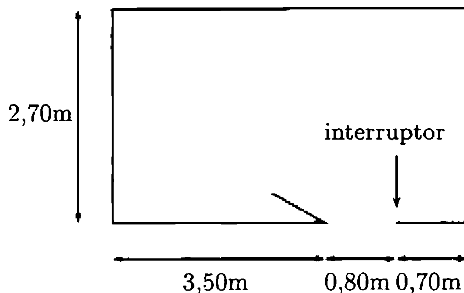
16. Dado um ponto $P = (x, y, z)$ em um sistema de coordenadas ortogonais, encontre as coordenadas:

a) da projeção de $P$ no plano $xy$

b) da projeção de $P$ no eixo $Oz$

c) do simétrico de $P$ em relação ao plano $xz$

17. A figura abaixo mostra a planta de um quarto, com pé direito igual a 3 m. Deseja-se instalar um fio conectando uma lampâda, localizada no centro do teto, ao interruptor, situado a 80 cm de altura, junto à porta indicada na planta (cuja altura é 1,95 m).




Determine o comprimento de fio necessário nos seguintes casos:

a) O fio deve se manter, tanto no teto como na parede, paralelo a uma das três direções principais.

b) O fio, na parede, deve ficar colocado segundo a vertical.

c) O fio pode ficar em qualquer posição na parede e no teto.

## 8.2 Soluções

1. Não. Basta considerar duas retas concorrentes $s$ e $t$ em um plano perpendicular a uma reta $r$. As retas $s$ e $t$ são ambas ortogonais a $r$, mas não são paralelas entre si.

2. a) Seja uma reta paralela a $r$ e $\beta$ um plano paralelo a $\alpha$. Como $r$ é ortogonal a cada reta de $\alpha$, o mesmo ocorre com $s$. Logo $s$ também é perpendicular a $\alpha$. Cada reta de $\beta$ é paralela a uma reta de $\alpha$ e, portanto, é ortogonal a $r$. Logo, $r$ também é perpendicular a $\beta$.

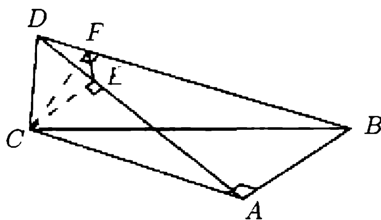
   b) Suponhamos que $r$ e $r'$ sejam ambas perpendiculares ao plano $\alpha$ e que $r$ e $r'$ não sejam paralelas. Pelo ponto de interseção de $r'$ e $\alpha$ traçamos a reta $r''$, paralela a $r$. Como $r'$ não é paralela a $r$, as retas $r'$ e $r''$ são distintas e determinam um plano $\beta$, que corta $\alpha$ segundo a reta $s$. Como $r'$ e $r''$ são ambas perpendiculares a $\alpha$, resulta que $r'$ e $r''$ são ambas perpendiculares a $s$. Mas isto significa que, no plano $\beta$, existem duas retas perpendiculares à reta $s$ passando pelo mesmo ponto, o que é uma contradição. Logo, $r$ e $r'$ são necessariamente paralelas.

   Suponhamos que dois planos distintos $\alpha$ e $\beta$ sejam ambos perpendiculares a $r$. Seja $s$ uma reta qualquer de $\alpha$ passando pelo ponto de interseção de $r$ e $\alpha$ e considere o plano determinado por $r$ e $s$, que corta $\beta$ segundo uma reta $t$. A reta $t$ é necessariamente perpendicular a $r$ (já que $r$ é perpendicular a $\alpha$) e, portanto, é paralela a $s$ (já que retas de um plano perpendiculares a uma outra reta deste plano são paralelas entre si). Logo, existe uma reta de $\beta$ que é paralela a $s$, o que mostra que $s$ é paralela a $\beta$. Como o argumento vale para toda reta de $\alpha$ passando pelo seu ponto de interseção com $P$, segue-se que $\alpha$ e $\beta$ são planos paralelos.

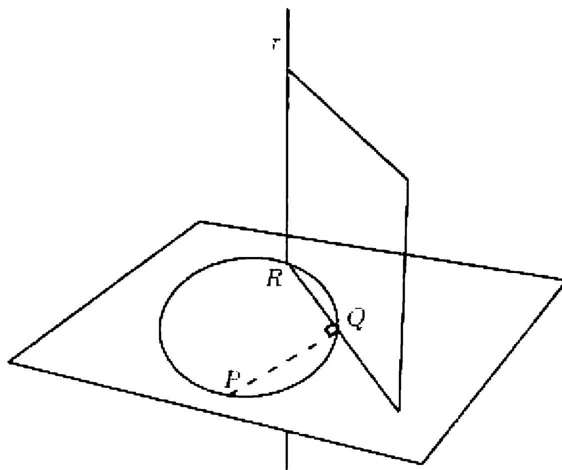
3. a) A reta $AB$ é perpendicular a $AC$ (já que o triângulo $ABC$ é retângulo em $A$) e ortogonal a $CD$ (já que $CD$ é perpendicular a um plano que contém $AB$). Portanto, $AB$ é ortogonal a toda reta do plano $ACD$; em particular, é perpendicular a $AD$.

   b) $CE$ é perpendicular a $AD$, por construção. Além disso, $CE$ é ortogonal a $AB$, por estar contida em um plano perpendicular a $AB$. Portanto, $CE$ é perpendicular a todas as retas do plano $ADB$ passando por $E$; em particular, $CE$ é perpendicular a $EF$.

   c) Como $CE$ é perpendicular ao plano $ADB$, $CE$ é ortogonal a $DF$. Por outro lado, $CF$ é perpendicular a $DF$, por construção. Portanto, o plano $CEF$ é perpendicular a $DF$ e, em conseqüências, $DF$ é perpendicular à reta $EF$ contida neste plano.



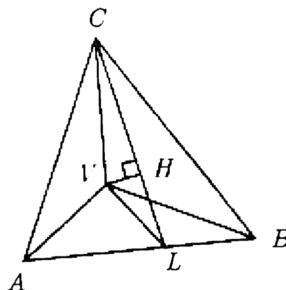

4. As retas perpendiculares a $r$ estão no plano perpendicular a $r$ passando por $P$. Os pés destas perpendiculares são exatamente os pontos $Q$ tais que o ângulo $PQR$ é reto, onde $R$ é a projeção ortogonal de $P$ sobre $r$. Logo, o $L.G.$ é um círculo de diâmetro $PR$.




5. Os quatro centros das faces de um tetraedro regular determinam um outro tetraedro regular. Os seis centros das faces de um cubo são vértices de um octaedro regular (note que cada face do octaedro corresponde a um vértice do cubo). Reciprocamente, os oito centros das faces de um octaedro regular são vértices de um cubo.

6. Seja $VH$ a perpendicular baixada sobre o plano $ABC$ e considere o plano determinado por $C$, $V$ e $H$, que intersecta $AB$ em $L$. Como $VC$ é perpendicular a $VA$ e $VB$, segue-se que $VC$ é ortogonal a $AB$. Por outro lado, $VH$ também é ortogonal a $AB$, por ser perpendicular ao plano $ABC$ que contém $AB$. Logo,

o plano $VHC$ é perpendicular à reta $AB$. Assim, a reta $VL$, que está contida neste plano, é perpendicular à aresta $AB$; ou seja, $H$ pertence à altura relativa ao lado $AB$ do triângulo $ABC$. O mesmo argumento mostra que $H$ também está sobre as demais alturas, mostrando que $H$ é o ortocentro de $ABC$.




7. Sejam $\alpha$ e $\beta$ dois planos tais que as retas $r$ e $s$ sejam respectivamente perpendiculares a eles. Suponhamos, inicialmente, que $r$ e $s$ sejam ortogonais. Seja $P$ o ponto de interseção de $r$ e $\alpha$. Como $\alpha$ contém todas as retas perpendiculares a $r$ passando por $P$, segue-se que a paralela $s'$ a $s$ passando por $P$ está contida em $\alpha$. Logo, $\alpha$ contém uma reta $s'$ que é perpendicular a $\beta$, o que mostra que $\alpha$ e $\beta$ são perpendiculares. Para a recíproca, suponhamos agora que $\alpha$ e $\beta$ sejam perpendiculares. Sejam $s'$ e $r'$ retas perpendiculares à interseção de $\alpha$ e $\beta$ contidas em cada um dos planos. Como os planos são perpendiculares, estas retas são perpendiculares entre si e perpendiculares a $\beta$ e $\alpha$, respectivamente. Logo, elas são respectivamente paralelas a $r$ e $s$, o que mostra que $r$ e $s$ são ortogonais.

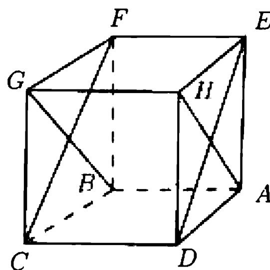
8. Certo. Se $\alpha$ contém uma reta perpendicular a um plano $\beta$, então $\alpha$ é perpendicular a $\beta$. Mas, neste caso, $\beta$ também é perpendicular a $\alpha$ e, portanto, possui uma reta perpendicular a $\alpha$.

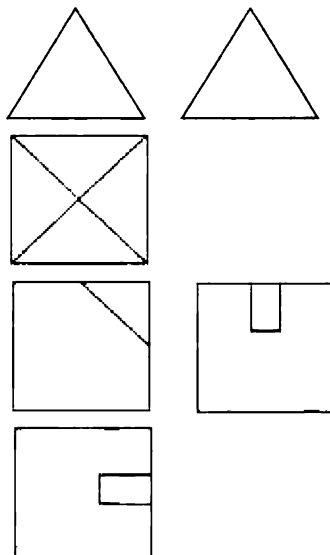
9. Sim. Se $r$ é perpendicular a $\alpha$, todo plano contendo $r$ é perpendicular a $\alpha$. Caso contrario, basta conduzir, por um ponto qualquer de $r$, uma reta $s$ perpendicular a $\alpha$; $r$ e $s$ determinam um plano perpendicular a $\alpha$.

10. Se o plano $\gamma$ é perpendicular à reta de interseção de $\alpha$ e $\beta$, então cada um deles dois planos possui uma reta perpendicular a $\gamma$, o que mostra que cada um deles é perpendicular a $\gamma$. Suponhamos, por outro lado, que $\gamma$ seja perpendicular

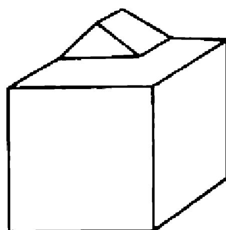
a $\alpha$ e a $\beta$. Cada um destes planos possui, portanto, uma reta perpendicular a $\gamma$. Como todas as retas perpendiculares a $\gamma$ são paralelas, resulta que estas duas retas são paralelas entre si. Mas duas retas contidas em planos secantes são paralelas se e somente se são paralelas à sua interseção; portanto, a reta de interseção de $\alpha$ e $\beta$ é também perpendicular a $\gamma$.

11. Basta mostrar que um dos planos contém uma reta perpendicular ao outro. Tomemos, por exemplo, a diagonal de face $ED$. $ED$ é perpendicular a diagonal de face de $AH$ e é ortogonal à aresta $AB$, por estar contida no plano da face $AEHD$, que é perpendicular a $AB$. Portanto, $ED$ é perpendicular ao plano diagonal $AHGB$, o que mostra que o plano diagonal $CDFE$ é perpendicular a ele.

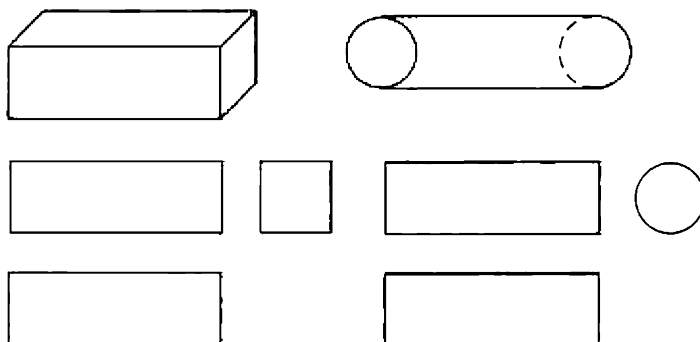




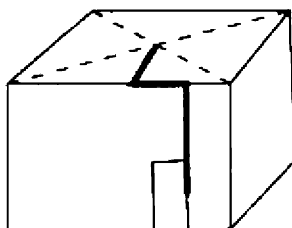
13. .



14. A resposta óbvia é um paralelepípedo retângulo, com a vista de perfil correspondente sendo um outro retângulo, conforme mostrado na figura da esquerda. No entanto, existem outros sólidos com as mesmas vistas superior e frontal. Por exemplo, o sólido poderia ser um cilindro, com o conjunto de vistas dado à direita.

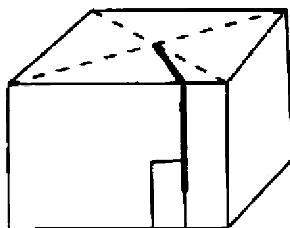
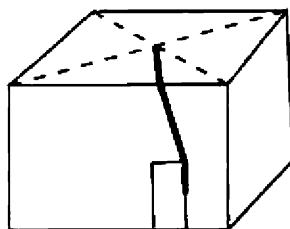
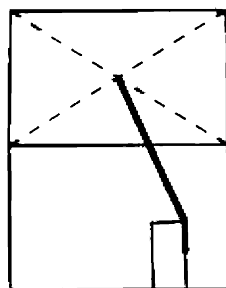


15. a) No primeiro caso, o comprimento de fio na parede é $(3,00-0,80) = 2,20$m, no encontro da parede com o teto é $(2,50 - 0,70) = 1,80$m e no teto é 1,35m, Para um comprimento total igual a 5,35m.



b) O comprimento ao longo da parede é o mesmo (2,20m), mas ao longo do teto ele segue em linha reta, para um comprimento igual a $\sqrt{1,80^2 + 1,35^2} = 2,25$m; o comprimento total é igual a 4,45m.

c) O fio deve subir verticalmente até o limite da porta, com um comprimento igual a $1,95-0,70 = 1,25$m. A partir daí, deve se dirigir ao centro do teto de acordo com um caminho mínimo, que pode ser obtido através da planificação da parede e o teto. O comprimento de fio corresponde à hipotenusa de um triângulo retângulo de lados iguais a 1,80m e 1,05+1,35=2,40m e, portanto, mede $\sqrt{1,80^2 + 2,40^2} = 3,00$m, Logo, o comprimento total de fio é 4,25m

# CAPÍTULO 9

## Medindo Distâncias e Ângulos

### 9.1 Exercícios

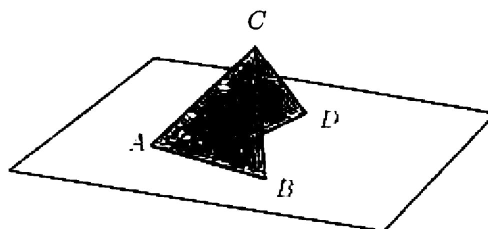
1. Mostre que as retas opostas de um tetraedro regular são ortogonais.

2. Considere os pontos médios das arestas $BC$, $CD$, $BF$, $DH$, $EF$ e $EH$ de um cubo. Mostra que esses seis pontos estão no mesmo plano.

3. Qual é o lugar geométrico dos pontos eqüidistastes de três pontos não colineares?

4. Qual é o lugar geométrico dos pontos eqüidistastes de dois planos secantes dados? E se os planos forem paralelos?

5. Um pedaço de papel em forma de um quadrado $ABCD$ é dobrado ao longo da diagonal $AC$ de mos que os lados $AB$ e $AD$ passem a formar um ângulo de $60°$. A seguir, ele é colocado sobre uma mesa, apoiado sobre esses lados. Nessas condições, calcule o ângulo que a reta $AC$ e o plano $ABC$ formam com o plano horizontal.

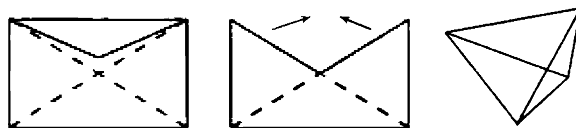



6. Um tetraedro pode ser construído a partir de um envelope da forma descrita abaixo.

   a) Tome um envelope comum, feche-o e trace as diagonais do retângulo por ele determinado.

   b) A seguir, corte o envelope como indicado, removendo seu quarto superior (b).

   c) Agora, dobre o envelope, encaixando uma borda na outra. Pronto! Temos um tetraedro.



   Que propriedades interessantes possui o tetraedro formado? Sob que condições ele é um tetraedro regular?

7. Considere três retas mutuamente perpendiculares $x$, $y$ e $z$, concorrentes em $O$. Uma reta $r$ passa por $O$ e forma ângulos iguais a $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ com $x$, $y$ e $z$. Mostre que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

8. Sejam $\alpha$ e $\beta$ dois planos secantes. Considere uma reta $r$ qualquer contida em $\alpha$. Mostre que o ângulo entre $r$ e $\beta$ é máximo quando $r$ é perpendicular à interseção de $\alpha$ e $\beta$ (retas de um plano $\alpha$ que são perpendiculares à sua interseção com o plano $\beta$ são, por esta razão, chamadas de retas de máximo declive de $\alpha$ em relação a $\beta$.)

9. Considere um octaedro regular de aresta $a$. Determine:

a) A distância entre duas faces opostas.

b) O ângulo diedro formado por duas faces adjacentes.

10. As moléculas de metano ($CH_4$) têm o formato de um tetraedro regular, com um átomo de hidrogênio em cada vértice, cada um deles ligado ao átomo de carbono no centro do tetraedro. Calcule o ângulo formado por duas dessas ligações.

12. Sejam $r$ e $s$ duas retas reversas ortogonais e $MN$ o segmento da perpendicular comum. Tomam-se um ponto $A$ sobre $r$ e um ponto $B$ sobre $s$. Calcular o comprimento do segmento $AB$ em função de $MA = a$, $NB = b$ e $MN = c$.

13. Mostre que a reta que une os pontos médios de duas arestas opostas de um tetraedro regular é a perpendicular comum a elas.

14. Qual é a seção determinada em um tetraedro regular $ABCD$ por um plano paralelo às arestas $AB$ e $CD$ e passando pelo ponto médio da aresta $AC$?

15. Sejam dois pontos $A$ e $B$ não diametralmente opostos de uma esfera. Mostre que existe um e somente um círculo máximo da esfera passando por $A$ e $B$.

16. Sejam $A$ e $B$ pontos do espaço. Qual é o lugar geométrico dos pontos $P$ no espaço tais que o ângulo $APB$ seja reto?

17. Seja $P$ um ponto exterior a um plano $\alpha$ e $Q$ um ponto de $\alpha$. Qual é o lugar geométrico dos pés das perpendiculares traçadas de $P$ às retas de $\alpha$ que passam por $Q$?

18. Em um tetraedro regular de aresta $a$, calcule os raios das esferas circunscritas, inscrita e tangente às arestas.

19. Em um octaedro regular de aresta $a$, calcule os raios das esferas circunscritas, inscrita e tangente às arestas.

20. Quanto esferas de raio 1 são tangentes entre si exteriormente três a três e tangentes internamente a uma esfera de raio $R$. Determine $R$.

21. Considere nove esferas de raio $R$, interiores a um cubo de aresta $a$, sendo uma com centro no centro do cubo e cada uma das demais tangentes a três faces e à esfera central. Calcule $R$ em função de $a$.

22. O nosso planeta é dividido em regiões chamadas "fusos horários" de modo que, em cada uma delas, teoricamente todos os relógios devem marcar a mesma hora no mesmo instante. Qual é o ângulo central correspondente a um fuso horário?

23. O fuso horário de referencia (chamado GMT-0) é a região compreendia entre as longitudes $-7,5°$ e $+7,5°$. Abaixo estão as longitudes de seis cidades:

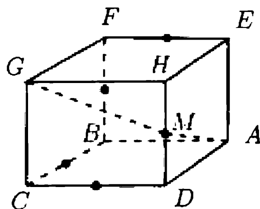
| | |
|---|---|
| Nova York | $-74°$ |
| Rio de Janeiro | $-43°$ |
| Paris | $2°$ |
| Atenas | $24°$ |
| Bagdá | $45°$ |
| Calcutá | $88°$ |

Se são 12 horas no Rio, que horas serão nas outras cinco cidades?

## 9.2 Soluções

1. Considere as arestas opostas $AB$ e $CD$ do tetraedro $ABCD$. Como $CA = CB$ e $DA = DB$, os pontos $C$ e $D$ estão, ambos, no plano mediador de $AB$, que é perpendicular a $AB$. Logo, a reta $CD$ é ortogonal a $AB$, por estar contida em um plano perpendicular a $AB$.

2. Tomemos, por exemplo, o ponto $M$, médio de $DH$. Os triângulos retângulos $ADM$ e $GHM$ são iguais. Logo, $AM = GM$, o que mostra que $M$ está no plano da diagonal $AG$. O mesmo ocorre com os demais pontos médios. Logo, todos eles estão sobre um mesmo plano.

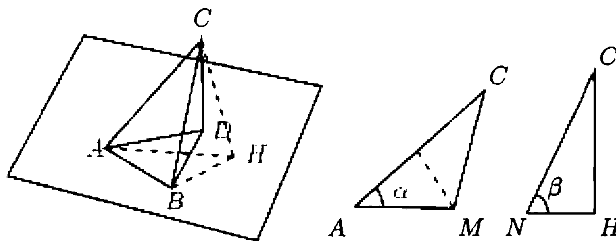


3. É a interseção dos planos mediadores dos segmentos determinados por eles, que é a reta perpendicular ao plano do triângulo passando pelo seu circuncentro.

4. O conjunto dos planos eqüidistastes de dois planos secantes é a união dos dois planos bissetores dos diedros formados por eles (estes dois planos são perpendiculares entre si). No caso dos planos serem paralelos, o $L.G.$ dos pontos eqüidistastes é o plano paralelo a ambos, a igual distância dos dois.

5. O triângulo $ABC$ é isósceles ($AB = AD$) e tem um ângulo igual a 60°; logo, ele é equilátero. Assim, $BD = AB = AD = a$ (lado do quadrado). Como $BC$ e $CD$ são também iguais ao lado do quadrado, segue-se que o triângulo $BCD$ também é equilátero. Portanto, o triângulo $AMC$ é isósceles, com $AM = CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (altura de triângulo equilátero de lado $a$) e $AC = a\sqrt{2}$ (diagonal de quadrado de lado $a$). Assim, o ângulo $\alpha$ que $AC$ forma com o plano horizontal é tal que

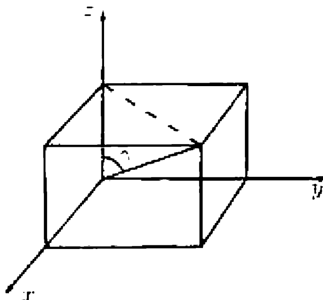
$$\cos\alpha = \frac{AC/2}{AM} = \frac{a\sqrt{2}/2}{a\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0,8165 \quad \text{e} \quad \alpha \approx 35^\circ$$



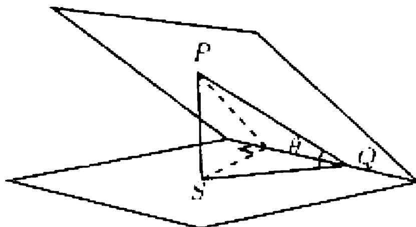

Como o triângulo $ABC$ é retângulo em $B$, o segmento $BC$ é perpendicular a $AB$. Logo, o ângulo que o plano $ABC$ forma com o plano horizontal é o ângulo que a reta $BC$ forma com ele. Para calculá-lo basta conduzir por $BC$ um plano perpendicular a $AB$. Podemos, por exemplo, traçar a $CH$ e $BC$ são ambas ortogonais a $AB$, o plano formado é perpendicular a $AB$. A reta $BH$, contida neste plano, é perpendicular a $AB$ e, portanto, $BH = AB\operatorname{tg}30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Logo, o ângulo $\beta$ que o plano de $ABC$ forma com o plano horizontal é tal que:

$$\cos\beta = \frac{BH}{BC}\frac{a\sqrt{3}/3}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,55774 \quad \text{e} \quad \alpha \approx 54^\circ$$

6. Um ponto $P$ qualquer da reta determinada com o ponto $O$ uma diagonal de um paralelepípedo retângulo com arestas de direção $x$, $y$ e $z$. O ângulo $\gamma$, formado com o eixo $z$, é tal que $\cos\gamma = z/OP$. Do mesmo modo, $\cos\alpha = x/OP$ e $\cos\beta = y/OP$. Logo, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2+y^2+z^2}{OP^2} = \frac{OP^2}{OP^2} = 1$




7. Por um ponto qualquer $P$ da $\alpha$ tracemos uma reta $r$ que corta em $Q$ a reta interseção de $\alpha$ e $\beta$. Seja $S$ o pé da perpendicular baixada de $P$ a $\beta$. O ângulo $\theta$ que $r$ forma com o plano $\alpha$ é tal que $\operatorname{sen}\theta = PS/PQ$. Logo, $\theta$ é máximo quando $PQ$ é mínimo, ou seja, quando $r$ é perpendicular à reta de interseção.

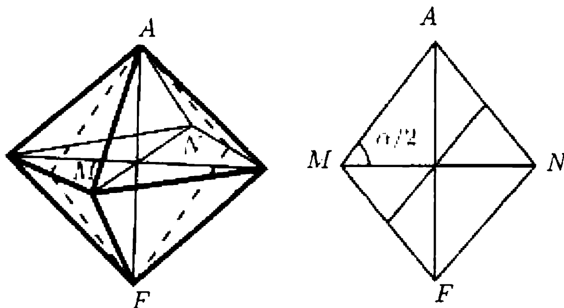



8. Os elementos pedidos aparecem na seção determinada no octaedro por um plano que contém dois vértices opostos e passa pelo ponto médio de duas arestas opostas. Sendo $a$ a aresta do octaedro, a seção é um losango de lados iguais a $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ e diagonais iguais a $a$ e $a\sqrt{2}$. A distância $d$ entre as faces opostas do octaedro é a altura do losango e pode ser calculada exprimindo-se a área do losango de dois modos diferentes (como o produto da base pela altura e como o semiproduto das diagonais). Temos:

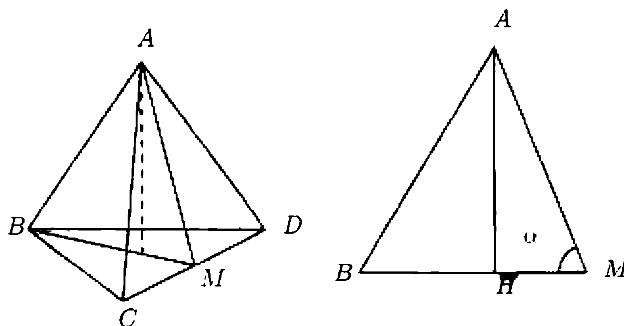
$$\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot d = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{2} \quad \text{e daí} \quad d = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

O ângulo diedro $\alpha$ entre faces adjacentes é tal que:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{a\sqrt{2}/2}{a/2} = \sqrt{2} \approx 1,414; \quad \text{daí } \alpha/2 \approx 55^\circ \text{ e } \alpha \approx 110^\circ.$$




9. O ângulo diedro entre duas faces do tetraedro aparece na seção perpendicular à sua aresta comum $AB$. É convenientemente tomá-la passando pelo ponto médio $M$ da aresta; neste caso, ela contém a aresta oposta. A perpendicular ao plano $BCD$ baixada de $A$ corta aquele plano no seu circuncentro $H$. Assim, temos $AM = BM$ e $HM = \frac{1}{3}BM$. Portanto, o ângulo diedro $\alpha$ é tal que $\cos\alpha = HM/AM = 1/3$ e $\alpha \approx 70^\circ$.




10. O centro do tetraedro fica sobre a altura traçada de um dos vértices e a divide em segmentos que estão entre si na razão 3:1 (veja o exercício 18). Assim, o ângulo $\alpha$ pedido é o ângulo do vértice de um triângulo isósceles de base igual a $a$ e lados iguais a 3/4 da altura do tetraedro, ou seja, $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. Logo, $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{a/2}{a\sqrt{6}/4} = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0,8165$. Logo, $\alpha/2 \approx 55^\circ$ e $\alpha \approx 110^\circ$.

11. O triângulo $AMN$ é retângulo, pois $MN$ é perpendicular a $r$. Por outro lado, o triângulo $ANM$ também é retângulo, já que a reta $s$ é perpendicular ao plano $MAN$, por ser perpendicular a $MN$ e ortogonal a $r$. Assim, temos as relações:

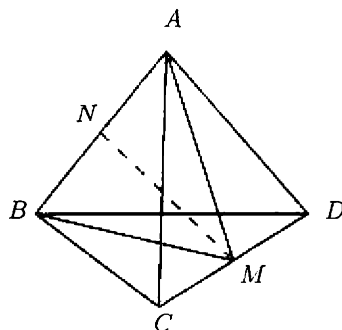
$AN^2 = a^2 + c^2$

$AB^2 = b^2 + AN^2$,

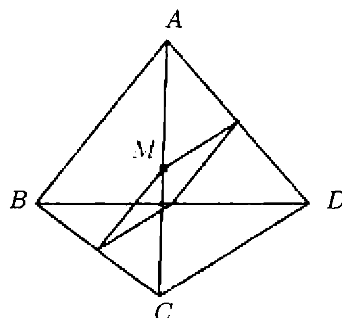
de onde se ontem $AB^2 = a^2 + b^2 + c^2$

12. Sejam $M$ e $N$ os pontos médios das arestas $AB$ e $CD$. Como $AC = AD$ e $BC = BD$, os vértices $A$ e $B$ pertencem ao plano mediador da aresta $CD$; logo,

o plano $AMB$ é perpendicular a $CD$ e a reta $MN$, contida neste plano, também é perpendicular a $CD$. Do mesmo modo, $MN$ é também perpendicular a $AB$ e é, portanto, a perpendicular comum a $AB$ e $CD$.




13. A seção determinada em um tetraedro qualquer por um plano paralelo a duas arestas opostas é um paralelogramo, já que as retas de interseção com as faces são paralelas a uma das duas arestas opostas são ortogonais. Além disso, no caso de passar pelo médio de uma aresta, cada lado é igual a metade da aresta do tetraedro. Portanto, a seção é um quadrado.

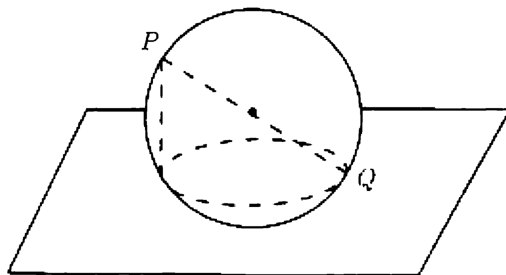



14. A interseção de uma esfera de centro $O$ e raio $r$ é o conjunto dos pontos $P$ do plano tais que $PO = r$. Seja $Q$ a projeção ortogonal de $O$ sobre o plano. Em cada triângulo $OPQ$, o cateto $OQ$ se mantém constante e igual a $\sqrt{r^2 - OQ^2}$. Portanto, o $L.G.$ dos pontos de interseção é sempre um circulo, que tem raio máximo quando $OQ = 0$, ou seja, quando o plano passa pelo centro $O$ da esfera.

15. Como estes dois pontos não são diametralmente opostos, eles não são colineares com o centro da esfera. Logo, determinam um único plano, que intersecta a esfera segundo um círculo máximo.

16. $APB$ é um triângulo retângulo em $P$ se e somente se a mediana relativa a $AB$ mede a metade do segmento $AB$. Isto faz com que o L.G. dos pontos $P$ que determinam um ângulo reto $APB$ seja o conjunto dos pontos tais que a distância ao ponto médio de $AB$ é constante e igual a metade de $AB$, ou seja, uma esfera de diâmetro $AB$.

17. Os pés das perpendiculares formam com $P$ e $Q$ um ângulo reto. Logo, seu lugar geométrico é o circulo resultante da interseção da esfera de diâmetro $PQ$ (veja o exercício anterior) com o plano; este círculo tem diâmetro $QR$, onde $R$ é a projeção de $P$ sobre o plano.




18. O L.G. dos pontos eqüidistastes de três vértices $B$, $C$ e $D$ de um tetraedro é a perpendicular a seu plano passando pelo circuncentro. No caso de um tetraedro regular, esta perpendicular passa pelo vértice $A$ (já que ele é eqüidistaste de $B$, $C$ e $D$); é, portanto, a altura do tetraedro. O centro da esfera circunscrita é o ponto $O$ sobre a altura $AH$ tal que $OA = OB$. Assim, no triângulo $OBH$, temos:

$$R^2 = \left(\frac{a\sqrt{6}}{3} - R\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

onde $R$ é o radio da esfera circunscrita.

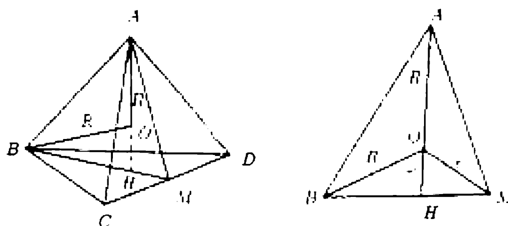
Resolvendo a equação acima, obtém-se $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$. Portanto, o ponto $O$ é tal que $\frac{OA}{AH} = \frac{a\sqrt{6}/4}{a\sqrt{6}/3} = \frac{3}{4}$. Este ponto necessariamente está sobre as demais alturas do tetraedro e é centro também das esferas tangentes às faces do tetraedro (já

que a altura relativa a um vértice é também à reta de interseção dos bissetores dos diedros das faces); argumento análogo mostra também que ele é centro de uma esfera tangente às arestas. Os raios destas esferas são dados por:

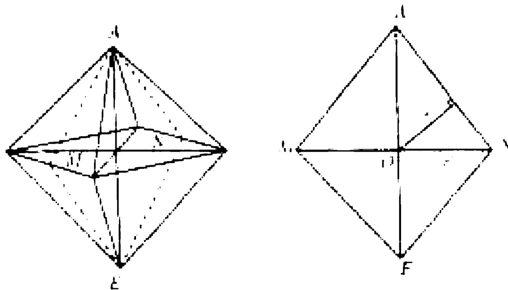
$$r = OH = \frac{1}{4}AH = \frac{a\sqrt{6}}{12}$$

e

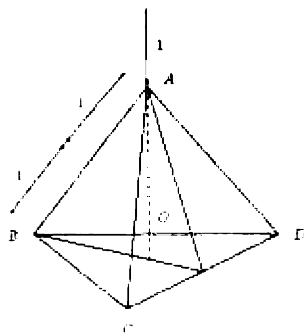
$$r' = OM = \sqrt{OH^2 + HM^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{12}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$




19. Os raios das esferas circunscritas, inscritas e tangentes às arestas de um octaedro regular aparecem na seção obtida por um plano que passa por dois vértices opostos e pelos pontos médios de duas arestas opostas não incidentes a estes vértices. O raio $R$ da esfera circunscrita é igual à metade da diagonal do octaedro, que, por sua vez, é a diagonal de um quadrado de lado $a$. Logo, $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. O raio $r'$ da esfera tangente às arestas é igual à metade da distância $MN$ entre duas arestas opostas; ou seja, $r' = a/2$. O raio $r$ da esfera inscrita é igual à metade da distância entre as arestas (veja o exercício 8) e é igual a $\frac{a\sqrt{6}}{6}$

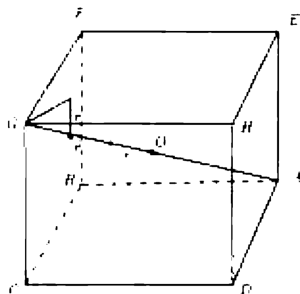


20. Os centros das esferas são vértices de um tetraedro regular de arestas $a = 2$. O raio $R$ da esfera tangente exteriormente a elas é igual a $OA + 1$, onde $OA$ é o segmento que une o centro $O$ do tetraedro a um dos vértices (ou seja o raio da esfera circunscrita ao tetraedro). Usando o resultado do exercício 18, temos $R = \frac{a\sqrt{6}}{4} + 1 = \frac{\sqrt{6}}{2} + 1$.



21. Uma esfera tangente a três faces de um cubo tem seu centro eqüidistaste destas faces; portanto, sobre a reta de interseção dos três diedros, que é a diagonal referente a este vértice (basta notar que o vértice oposto é eqüidistaste das três faces). Na figura, estão representados o centro $Q$ de uma das esferas tangentes a três e o centro $O$ da esfera central.

Temos: $\frac{r}{GQ} = \frac{AE}{AG} = \frac{a}{a\sqrt{3}}$ e, portanto, $GQ = r\sqrt{3}$. Considerando o segundo $OG$, que corresponde à metade da diagonal do cubo, temos $2r + r\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, de onde se obtém $r = \frac{2\sqrt{3}-3}{2}a$.



22. Há 24 fusos horários (um para cada hora do dia). Logo, o ângulo central corresponde a um fuso horário é $360°/24 = 15°$.

23. O fuso central corresponde a uma localidade tem longitude igual ao múltiplo de 15 mais próximo da longitude da localidade. Assim, temos:

| Cidade | Longitude | Meridiano Central | Hora em relação a Greenwich | Hora às 12 h do Rio de Janeiro |
|---|---|---|---|---|
| Nova York | $-74°$ | $-75°$ | -5 horas | 10 h |
| Rio de Janeiro | $-43°$ | $-45°$ | -3 horas | 12 h |
| Paris | $2°$ | $0°$ | 0 horas | 15 h |
| Atenas | $24°$ | $30°$ | +2 horas | 17 h |
| Bagdá | $45°$ | $45°$ | +3 horas | 18 h |
| Calcutá | $88°$ | $90°$ | +6 horas | 21 h |

# CAPÍTULO 10

## Poliedros

### 10.1 Exercícios

1. Um poliedro convexo de 20 arestas e 10 vértices só possui faces triangulares e quadrangulares. Determine os número de faces de cada gênero.

2. Diagonal de um poliedro é qualquer segmento que une dois vértices que não estão na mesma face. Quantas diagonais possui o icosaedro regular?

3. Mostre que para todo poliedro convexo valem as desigualdades

   a) $A + 6 \leq 3F$

   b) $A + 6 \leq 3V$

4. Mostre que se um poliedro convexo tem 10 arestas estão ele tem 6 faces.

5. Descreva todos os poliedros que possuem 10 arestas.

6. Um poliedro convexo $P$ possui $A$ arestas, $V$ vértices e $F$ faces. Com bases em cada uma das faces constroem-se pirâmides com vértices exteriores a $P$. Fica formado então um poliedro $P'$ que só possui triangulares. Determine os número de arestas, faces e vértices de $P'$.

7. Um cubo de arestas $a$ é selecionado por planos que cortam, cada um todas as arestas concorrentes num vértice em pontos que distam $x$ $(x < a/2)$ deste vértice. Retirando-se as primeiras formadas, obtém-se um poliedro $P$. Descreva esse poliedro e calcule seu número de diagonais.

8. Considerando o poliedro $P$ do exercício anterior, suponha agora que $P$ tem todas as arestas iguais. Calcule, em função de $a$ o comprimento de sua aresta.

*Os exercícios a seguir tratam de grafos, Nos dois primeiros pode-se utilizar o caso plano da relação de Euler. Os três últimos apenas do seu raciocínio.*

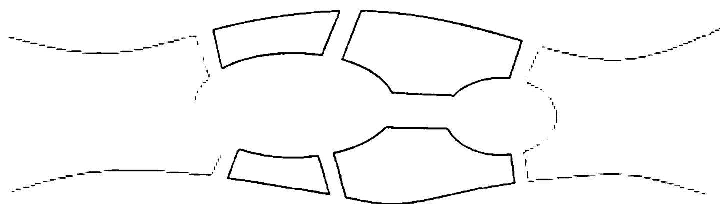
9. Veja o mapa da América do Sul. Existem 13 países mais o oceano, que também consideramos um "pais". Observa-se que não existe nenhum ponto que pertença a mais de 3 países. Quantas linhas de fronteiras existem na América do Sul?

10. Na figura abaixo, as casas 1, 2 e 3 devem ser conectadas aos terminais de água (A), Luz (L) e telefone (T). É possível fazer essas ligações sem que duas conexões se cruzem?

1 2 3

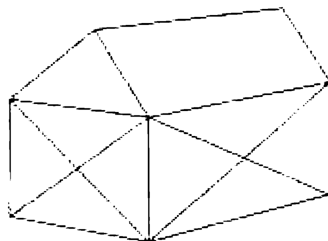
A L T

11. A cidade de Königsberg está situada nas margens do Mar Báltico, na foz do rio Pregel. No rio, existem dias ilhas ligadas às margens e uma à outra por sete pontes como se vê na figura abaixo



O povo, que passeava dando voltas por estas ilhas, descobriu que, partindo da margem sul do rio, não conseguia planejar um trajeto de modo a cruzar cada uma das pontes uma única vez. Explique porque isto não é possível.

12. Verifique se o desenho abaixo pode ser feito sem tirar o lápis do papel e sem passar por acima de uma linha já traçada.



13. Entre pessoas, suponha que a relação "conhecer" seja simétrica, ou seja, se $A$ conhece $B$ então $B$ conhece $A$. Prove que, se 6 pessoas são escolhidas ao acaso, ou existem 3 que se conhecem, ou existem 3 que se desconhecem.

## 10.2 Soluções

1. Se $A = 20$ e $V = 10$ então, pela relação de Euler, $F = 12$. Se $x$ é o número de faces triangulares temos:

$$2A = 3F_3 + 4F_4 \Rightarrow 40 = 3x + 4(12 - x)$$

o que dá $x = 8$.

O poliedro possui 8 faces triangulares e 4 quadrangulares.

2. Unindo cada par de vértices por um segmento, obtemos $C_{12}^2 = 66$ segmentos. Subtraindo as arestas, todos os outros segmentos são diagonais porque as faces do icosaedro são triangulares. Logo, o número de diagonais do icosaedro é $66 - 30 = 36$.

3. Sabemos que valem as desigualdades: $2A \geq 3F$ e $2A \geq 3V$ (ver "Matemática do Ensino Médio", vol. 2, seção 10.3). Da relação de Euler temos:

$$A + 2 = F + V$$

$$3A + 6 = 3F + 3V \leq 3F + 2A.$$

Daí, $A + 6 \leq 3F$ e a outra é análoga. Reunindo a desigualdade $2A \geq 3F$ com a do exercício anterior temos que $A + 6 \leq 3F \leq 2A$. Se $A = 10$ então $16 \leq 3F \leq 20$ e, portanto, $F = 6$.

4. Já sabemos, pelo exercício anterior, que um poliedro com 10 arestas possui 6 faces. Temos $2A = 3F + F_4 + 2F_5 + 3F_6 + \cdots$. Logo, $F_4 + 2F_5 + \cdots = 2$. Porém, isto só é possível em dois casos:

   a) $F_4 = 2$, $F_5 = F_6 = \cdots = 0$ e, portanto, $F_3 = 4$.

   b) $F_5 = 1$, $F_4 = F_6 = \cdots = 0$ e, portanto, $F_3 = 5$.

   Existem poliedros de dois tipos: um com duas faces quadrangulares e quatro triangulares e outro com uma face pentagonal e cinco triangulares e o leitor poderá facilmente fazer os desenhos.

5. Sejam $V'$, $A'$ e $F'$ os números de vértices, arestas e faces do poliedro $P'$. Observe que os vértices de $P'$ são também vértices de $P$. Além disso, $P'$ tem um vértice sobre cada face de $P$. Logo,

$$V' = V + F.$$

   É claro que $P'$ tem apenas faces triangulares e cada aresta de $P$ é lado de exatamente duas faces de $P'$. Logo,

$$F' = 2A.$$

   As arestas de $P$ são também de $P'$. Além disso, $P'$ tem arestas novas, que não são as arestas laterais das pirâmides. Em cada pirâmide, o número de arestas laterais é igual ao número de lados de sua base (uma face de $P$). Assim o número de arestas novas é $2A$ e, portanto,

$$A' = A + 2A = 3A.$$

   **Observação:** O poliedro $P'$ satisfaz a relação de Euler pois

$$A' + 2 = 3A + 2 = 2A + A + 2 = 2A + F + V = F' + V'.$$

6. No lugar de cada vértice do cubo apareceu uma face triangular. Logo, $F_3 = 8$. Além disso, cada face do cubo deu origem a uma face octogonal. Logo, $F_8 = 6$.

   O poliedro tem portanto 14 faces, 24 vértices (dois em cada aresta do cubo original) e, conseqüentemente, 36 arestas.

   Unido cada par de vértices de $P$ por um segmento, obtemos $C_{24}^2 = 276$ segmentos. Entanto, existem 36 desses segmentos que são arestas e outros que

são diagonais das faces octogonais (e não são diagonais de $P$). Cada octógono possui 20 diagonais e, portanto, existem $6 \times 20 = 120$ segmentos que estão sobre as faces de $P$ (e não são arestas). Logo, o número de diagonais de $P$ é $276 - 36 - 120 = 120$.

7. Se $P$ tem todas as arestas iguais então cada face octogonal, recortada de uma face quadrada do cubo original é regular. Seja $x$ o comprimento dos catetos de cada triângulo que foi retirado de uma face quadrada. Assim, cada aresta de $P$ é igual a $s\sqrt{2}$ e, portanto, $x + x\sqrt{2} + x = a$, o que dá

$$x = \frac{a(2 - \sqrt{2})}{2}$$

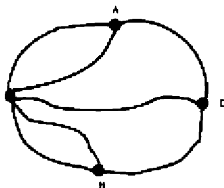
8. Temos $F = 14$. Se em cada vértice incidem 3 arestas então $2A = 3V$. Por outro lado, a relação de Euler fornece $A = 12 + V$. Daí decorre que $V = 24$ e $A = 36$. Temos portanto 36 linhas de fronteira na América do Sul.

   **Observações:**

   a) Como o oceano é um "país", o litoral de cada país é, neste problema, uma linha de fronteira.
   b) Não se considerou a fronteira da Colômbia com o Panamá. Tudo o que está fora da América do Sul se chamou *oceano*.
   c) Como o enunciado afirma que não existe ponto comum a mais de três países, estabelecemos um vértice onde o rio Uruguai desemboca no rio da Prata (já oceano).
   d) Ignoramos a Terra do Fogo pela sua complicação geográfica.

9. Não é possível. Pera mostrar isto imaginemos que as ligações sejam possíveis. Fica formado então um poliedro plano com 6 vértices e 9 arestas. Logo, esse poliedro terá 5 faces. Observe que esse poliedro não pode ter face triangular pois não há ligações entre duas casas nem entre dois terminais. Portanto, cada face (região) é, no mínimo, quadrangular. Ora, mas desta forma, o número de arestas será, no mínimo 10, o que é uma contradição.

10. Consideremos um ponto na margem de cima (A), outro na margem de baixo (B) e um em cada ilha (C e D). Todos os caminhos possíveis formam o grafo abaixo.



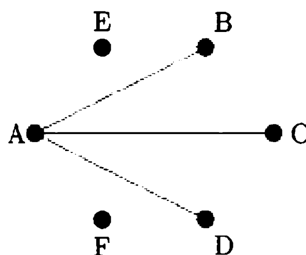

Como em cada vértice incidem um número ímpar de arestas, não é possível percorrer todas as arestas uma única vez.

**Observação:** Para que um grafo possa ser inteiramente percorrido sem passar duas vezes pela mesma aresta é necessário é suficiente que seus vértices tenham gênero par ou que, no máximo, apenas dois vértices tenham gênero ímpar (os pontos inicial e final do percurso).

11. Não, pelo que foi dito acima.

12. Sejam as pessoas, vértices de um grafo. Vamos ligar cada par de pessoas por uma linha cheia, caso se conheçam, ou uma linha tracejada , caso se desconheçam. De cada vértice do grafo partem 5 linhas e é claro que destas linhas existem pelo menos 3 do mesmo tipo. Assim, imaginemos três linhas cheias saindo do ponto $A$ do grafo, em direção aos pontos $B$, $C$ e $D$.

    Se algum lado do triângulo $BCD$ for cheio então existem 3 pessoas que se conhecem mutuamente. Se não, todos os lados do triângulo $BCD$ são tracejados e existem 3 pessoas que se desconhecem.



# CAPÍTULO 11

## Volumes e Áreas

### 11.1 Exercícios

1. Uma piscina tem 10m de comprimento, 6m de largura e 1,6m de profundidade.

   a) Calcule seu volume em litros.

   b) Determine quantos ladrilhos quadrados com 20cm de lado são necessários para ladrilhas essa piscina.

2. Um tablete de doce de leite medido 12cm por 9cm por 6cm, está inteiramente coberto com papel laminado. Esse tablete é dividido em cubos com 1cm de aresta.

   a) Quantos desses cubos não possuem nenhuma face coberta com o papel laminado?

   b) Quantos desses cubos possuem apenas uma face coberta com papel?

   c) Quantos desses cubos possuem exatamente duas faces cobertas com papel?

   d) Quantos desses cubos possuem três faces cobertas com papel?

3. Determine o volume do maior tetraedro que pode ser guardado dentro de um cubo de aresta $a$.

4. Considere um triângulo equilátero $ABC$ de lado $a$. Pelo centro $G$ do triângulo, considere um segmento $GD$ perpendicular ao plano do triângulo.

   a) Calcule o comprimento de $GD$ para que os segmentos $DA$, $DB$ e $DC$ tenham também comprimento $a$.

   b) Nas condições do ítem a), o tetraedro $ABCD$ é regular. Calcule então o volume de um tetraedro regular de aresta $a$.

5. Um cubo de aresta $a$ é selecionado por oito planos. Cada plano contém os pontos médios das três arestas que concorrem em um vértice. Retirando-se os tetraedros formados obtemos um poliedro $P$.

   a) Determine as faces de $P$.

   b) Calcule o volume de $P$.

   c) Calcule o raio da esfera circunscrita ao poliedro $P$.

6. Calcule o volume de um octaedro regular de aresta $a$.

7. Calcule o volume do octaedro cujos vértices são os centros das faces de um cubo de volume $V$.

8. a) Mostre que a soma das distâncias de um ponto interior a um tetraedro regular às suas faces é constante.

   b) A partir do ítem anterior, calcule o raio da esfera inscrita a um tetraedro regular de aresta $a$.

9. Uma pirâmide chama-se regular quando a sua base é um polígono regular e a projeção do vértice sobre o plano da base é o seu centro.

   Uma pirâmide regular de altura 4cm tem por base um quadrado de lado 6cm. Calcule seu volume, sua área e os raios das esferas inscrita e circunscrita.

10. Um cilindro reto possui uma esfera inscrita. Mostre que a razão entre as áreas desses dois sólidos é igual à razão entre seus volumes (Teorema de Arquímedes).

11. Um copo cônico de papel foi feito a partir de um setor de 12cm de raio e ângulo central de 120°. Calcule o volume desse copo.

12. Um cone reto tem 3cm de raio e 4cm de altura. Calcule seu volume, área e os raios das esferas inscrita e circunscrita.

13. Um como cilíndrico tem 3cm de raio e 12cm de altura. Estando inicialmente cheio d'água o copo é inclinado até que o plano de sua base faça 45° com o plano horizontal. Calcule o volume de água que permaneceu no copo.

14.

**Teorema.** *Se dois sólidos são semelhantes com razão de semelhança k, então a razão entre seus volumes é* $k^3$.

Demonstre este teorema em casos particulares utilizando paralelepípedo retângulo, prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera.

15. Uma garrafa de bebida com 30cm de altura tem uma miniatura perfeitamente semelhante com 10cm de altura. Se a miniatura tem 50ml de volume, qual é o volume da garrafa original?

16. Um cone tem altura $h$ e volume $V$. Este cone é selecionado por um plano paralelo à sua base, distando $h/3$ dessa base. Calcule os volumes das partes em que esse ficou dividido.

17. Um tanque subterrâneo tem a forma de um cone invertido com 12m de profundidade. Este tanque está completamente cheio com 27000 litros de água e 37000 litros de petróleo. Calcule a altura da camada de petróleo.

18. Utilizando um pouco de cálculo (ou de imaginação).

Um fabricante de leite condensado deseja comercializar seu produto em embalagens cilíndricas de volume $V$. Determine as dimensões dessa embalagem para que seja gasto um mínimo de material em sua fabricação (ou seja, a superfície da lata deve ser mínima).

19. O professor perguntou ao aluno qual seria o volume gerado pela rotação de um retângulo em torno de um eixo que contém um de seus lados. O aluno respondeu corretamente, calculando o volume de um cilindro. Em seguida o professor traçou a diagonal do retângulo e perguntou ao aluno quais seriam os volumes gerados pelos dois triângulos formados. O aluno então dividiu a resposta anterior por dois. Está certo isso?

## 11.2 Soluções

1 a) $V = 10 \times 6 \times 1,6 = 96m^3 = 96000$ litros.

b) A área do fundo é $10\times 6 = 60m^2$ e a área das paredes é $60+51,2 = 111,2m^2$ e a área de cada ladrilho é $0,04m^2$, o número de ladrilhos é $\frac{111,2}{0,04} = 2780$.

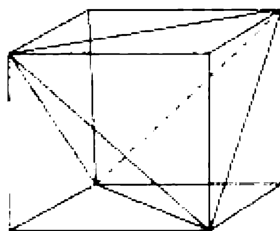
2. a) $10 \times 7 \times 2 - 280$

   b) $(10 \times 7 + 7 \times 4 + 10 \times 4)^2 = 276$

   c) $(10 + 7 + 4)4 = 84$

   d) 8

3. .



Este é o maior tetraedro que se pode guardar dentro de um cubo. Suas arestas são diagonais das faces do cubo. Seu volume é igual ao do cubo subtraido de quatro tetraedros tri-retângulos:

$$V = a^3 - 4 \cdot \frac{a^3}{6} - \frac{a^3}{3}.$$

4. a) A distancia do centro de um triângulo equilátero de lado a um dos vértices é $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $AGD$, temos:

$$DG^2 = AD^2 - AG^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{6a^2}{9}.$$

Logo,

$$DG = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

   b) $V = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

5. a) 8 faces triangulares (equiláteros) e 6 quadradas

   b) $V = a^3 - 8\frac{(a/2)^3}{6} = \frac{5a^3}{6}$.

c) Os vértices de $P$ são os pontos médios das arestas do cubo. A distância do centro do cubo a um desses pontos é $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ que é o raio da esfera circunscrita a $P$.

6. O octaedro regular é formado por duas pirâmides iguais cuja base comum é um quadrado de lado $a$ e cuja altura é metade da diagonal. O volume é

$$V = 2\left(\frac{a^2}{3}\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

7. Se o cubo tem aresta $a$ então $V = a^3$. Observe que a aresta do octaedro mede $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Então, usando o resultado do exercício anterior, o volume do octaedro é:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{a^3}{6}\frac{V}{}.$$

8. Seja $ABCD$ um tetraedro regular de aresta $a$. Sejam $d_1$, $d_2$, $d_3$, $d_4$ as distâncias de um ponto $P$, interior ao tetraedro às faces $ABC$, $ABD$, $ACD$, $BCD$, respectivamente. Sejam ainda $S$ à aresta de uma das faces e $h$ a altura do tetraedro. Vamos decompor o volume do tetraedro na soma dos volumes de quatro outros tetraedros; cada um terá base em uma das faces de $ABCD$ e vértice $P$.

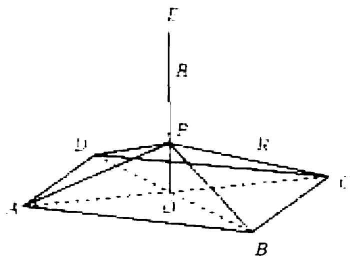
$$V(PABC) + V(PABD) + V(PACD) + V(PBCD) = V(ABCD)$$

$$\frac{Sd_1}{3} + \frac{Sd_2}{3} + \frac{Sd_3}{3} + \frac{Sd_4}{3} = \frac{Sh}{3}$$

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = h.$$

9. O volume é $V = \frac{6^2 \cdot 4}{3} = 48cm^3$.

A distância do centro da base a uma das arestas da base é 3. Como a altura mede 4, a distância do vértice da pirâmide a uma das arestas da base é igual a 5. Cada face lateral tem então área igual a $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15cm^2$. Logo, a área da pirâmide é $S = 6^2 + 4 \times 15 = 96cm^2$. Para encontrar o raio da esfera circunscrita imaginemos um ponto $P$ sobre a reta que contém a altura com a propriedade de ter mesma distância aos cinco vértices.



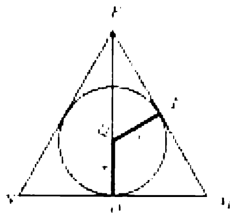

Se $PA = PB = PC = PE = R$, temos, no triângulo $POC$, por exemplo,

$$R^2 = (4 - R)^2 + (3\sqrt{2})^2.$$

Isto dá, $R = \frac{17}{4}$.

Aqui, o leitor poderá ficar intrigado se perceber que $R > 4$. Mas, não há problema algum. Este resultado informa que, na verdade, o ponto $P$, centro da esfera circunscrita, está abaixo do plano da base da pirâmide.

Para encontrar o centro da esfera inscrita imaginemos um ponto $Q$ sobre a altura que seja eqüidistaste das cinco faces. Sendo $M$ e $N$ os pontos médios das arestas $BC$ e $AD$, respectivamente, vamos fazer uma seção pelo plano $AMN$. O resultado é a figura abaixo:



Como $OM = 3$, $EM = 5$ e $EQ = 4 - r$, temos, pela semelhança dos triângulos $ETQ$ e $EOM$,

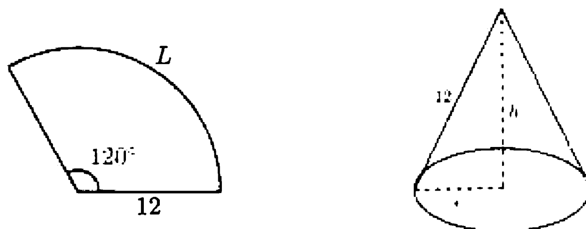
$$\frac{r}{3} = \frac{4 - r}{5}.$$

Isto dá $r = 1,5cm$.

10. A razão as áreas da esfera e do cilindro é $\frac{4\pi R^2}{2\pi R \cdot 2R + \pi R^2 + \pi R^2} = \frac{2}{3}$.

A razão entre os volumes é $\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\pi R^2 \cdot 2R} = \frac{2}{3}$.

11. Observe as figuras a seguir:




A geratriz do cone mede 12 e o comprimento $L$ do arco de 120° é o comprimento da circunferência da base do cone.

Então, $\frac{2\pi \cdot 12}{3} = 2\pi r$, o que dá $r = 4$.

No triângulo retângulo formado pela altura, raio da base do cone e geratriz, temos $h^2 = 12^2 - 4^2 = 128$, ou seja, $h = 8\sqrt{2}$.

O volume do cone é:

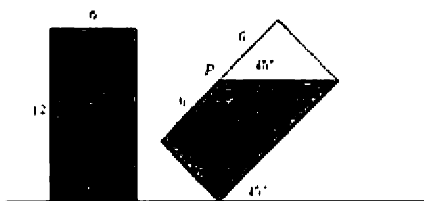
$$V = \frac{\pi 4^2 \cdot 8\sqrt{2}}{3} = \frac{128\pi\sqrt{2}}{3} \cong 189 cm^3.$$

12. O volume é $V = \frac{\pi 3^2 \cdot 4}{3} = 12\pi cm^3$. A área é $S = \pi 3 \cdot 5 + 3\pi 3^2 = 24\pi cm^2$.

Sendo $R$ o raio da esfera circunscrita temos $R^2 = (4 - R)^2 + 3^2$, o que dá $R = \frac{25}{4}$.

Para obter o raio da esfera inscrita, faça uma seção por um plano que contém a altura. O resultado é exatamente a última figura do exercício 9. O resultado também é o mesmo: $r = 1,5$.

13. Observe a figura abaixo:




No copo inclinado, imaginemos uma seção paralela a base pelo ponto $P$, médio da geratriz. O como fica dividido em dois cilindros iguais, um dos quais está

metade vazio. O volume de água que permaneceu no copo é 3/4 do volume original, ou seja,

$$\frac{3}{4}\pi 3^2 \cdot 12 = 81\pi cm^3.$$

14. Paralelepípedo retângulo.

Sejam $a$, $b$, $c$ as dimensões de um paralelepípedo retângulo de volume $V$ e, dada uma constante positiva $k$, sejam $ka$, $kb$, $kc$ as dimensões de um paralelepípedo retângulo de volume $V'$. Os dois sólidos são semelhantes com razão de semelhança $k$ e a razão entre seus volumes é $\frac{V'}{V} = \frac{kakbkc}{abc} = k^3$.

Prisma.

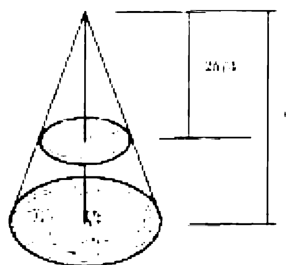
Imaginemos dos prismas semelhantes na razão $k$. A razão entre as alturas é $k$ e as bases são polígonos semelhantes na razão $k$. Sabemos entretanto que a razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Então, se $A$ e $A'$ são as áreas das bases e se $h$ e $h'$ são as respectivas alturas então a razão entre os volumes é

$$\frac{V'}{V} = \frac{A' \cdot h'}{A \cdot h} = \frac{A'}{A} \cdot \frac{h'}{h} = k^2 \cdot k = k^3.$$

As justificativas para as outras figuras são análogas.

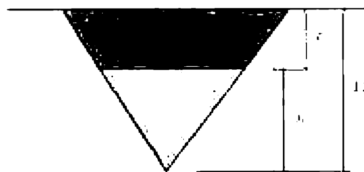
15. A razão de semelhança é $k = \frac{30}{10} = 3$. Sendo $V$ o volume da garrafa original, temos $\frac{V}{50} = 3^3$. Logo, $V = 1350$ml.

16. Observe a figura:



Se $V$ é o volume do cone, $V_1$ o volume do cone menor e $V_2$ o volume da parte compreendida entre os dois planos temos $\frac{V_1}{V} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$, ou seja, $V_1 = \frac{8V}{27}$ e, portanto, $V_2 = \frac{19V}{27}$.

17. Veja o desenho simplificado abaixo:



Petróleo e água se misturam e, como o petróleo é menos denso que a água, ele fica em cima. O volume do cone menor é o volume da água, ou seja, 27.000 litros e o volume do cone total é 27.000+37.000=64.000 litros. Temos então,

$$\frac{27000}{64000} = \left(\frac{h}{12}\right)^3 \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{h}{12} \Rightarrow h = 9.$$

Logo, a altura da camada de petróleo é $x = 3$m.

18. Primeira solução (com um pouco de cálculo).

Consideremos um cilindro de revolução com raio $x$ e altura $y$. Seu volume $V$ é dado e seja $S$ sua área total. Temos então $V = \pi x^2 y$ e $S = 2\pi x^2 + 2\pi xy = 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot \frac{V}{\pi x^2}$, ou seja, $S = 2\pi x^2 + \frac{2V}{x}$. A derivada de $S$ em relação a $x$ é $S' = 4\pi x - \frac{2V}{x^2}$ e como devemos ter $S' = 0$, o raio do cilindro é $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Substituindo este valor na fórmula do volume encontramos $y = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Observe que $y = 2x$, ou seja, quando o volume é dado, a menor área total é a do cilindro equilátero.

Segunda solução (sem cálculo).

Para fazer sem usar derivada, precisamos do seguinte teorema:

"Se o produto de $n$ números positivos é constante, sua soma será mínima quando eles forem iguais".

A afirmação acima é uma conseqüência direita da desigualdade entre as medias aritmética e geométrica (veja a seção ou o artigo "Duas Médias", da RPM 18.)

A área total do cilindro é dada em função de $x$ por $S = 2\pi x^2 + \frac{2V}{x}$. Vamos entretanto escrever a mesma coisa da seguinte forma:

$$S = 2\pi x^2 + \frac{V}{x} + \frac{V}{x}.$$

Porém, o produto dessas três parcelas é $2\pi x^2 \cdot \frac{V}{x} \cdot \frac{V}{x} = 2\pi V^2$ que é constante. Logo, a área total será mínima quando aquelas três parcelas forem iguais, ou seja, $2\pi x^2 = \frac{V}{x}$, o que dá $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

19. Não. Ao traçar a diagonal do retângulo, um dos triângulos, ao girar, gera um cone cujo volume é a terça parte do volume do cilindro. O volume gerado pelo outro triângulo é então igual a dois terços do volume do cilindro.

# CAPÍTULO 12

## Superfícies e Sólidos de Revolução

### 12.1 Exercícios

1. Calcula a área e a superfície do sólido de revolução gerado pela rotação de um triângulo equilátero de lado 1 em torno de um eixo (de seu plano) que contém um vértice e é perpendicular a um lado.

2. Calcule a área e o volume de um toro sabendo que as circunferências interna e externa têm diâmetros 10cm e 16cm.

3. Um triângulo retângulo de catetos $b$ e $c$ gira em torno de um eixo de seu plano que contém o vértice do ângulo reto. Determine o maior volume que pode ser gerado.

4. Considere em um sistema de coordenadas e o polígono convexo $P$ cujos vértices são (0,0), (0,6), (8,6), (8,4), (12,4) e (12,0). Determine as coordenadas do centro de gravidade:

   a) do *bordo* de $P$,

   b) da *superfície* de $P$.

5. Um plano secante a uma esfera divide sua superfície em duas regiões chamadas *calotas*. Mostre que a área de uma calota esférica é dada por $2\pi Rh$ onde $R$ é o raio da esfera e $h$ é a altura da calota.

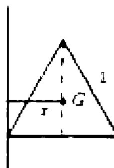
6. Um astronauta em sua nave espacial consegue observar em certo momento exatamente $1/6$ da superfície da Terra. Determine a que distância ele está da superfície do nosso planeta.

   Considere o raio da Terra igual a 6400km.

7. Encontre uma construção com régua e compasso para o centro de gravidade da superfície de um trapézio.

## 12.2 Solução

1. O perímetro do triângulo é igual a 3 e a área é $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

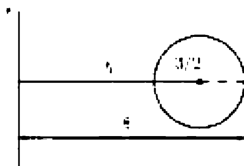



   Como a distância do centro do triângulo ao eixo é $x = \frac{1}{2}$ temos:

$$A = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 = 3\pi$$

$$V = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}\pi$$

2. O toro é formado pela rotação de um círculo de raio 1,5cm em torno de um eixo distante 5cm dele.

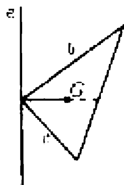


Temos $L = 2\pi\frac{3}{2} = 3\pi$, $S = \pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9\pi}{4}$ e $x = 5 + \frac{3}{2} = \frac{13}{2}$. Logo,

$$A = 2\pi \cdot \frac{13}{2} \cdot 3\pi = 39\pi^2 cm^2,$$

$$V = 2\pi \cdot \frac{13}{2} \cdot \frac{9\pi}{4} = \frac{117}{4}\pi^2 cm^3.$$

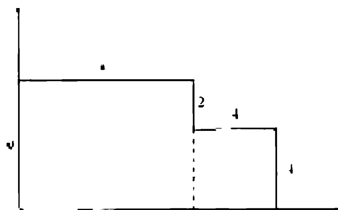
3. Devemos ter a maior distância possível do baricentro ao eixo. Portanto, a mediana relativa à hipotenusa deve ser perpendicular ao eixo.



A distancia do baricentro ao eixo é 2/3 do comprimento da mediana que, por sua vez, é igual a metade da hipotenusa. Portanto, $x = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2} = \frac{1}{3}\sqrt{b^2 + c^2}$. Daí, o volume máximo é:

$$V = 2\pi\frac{bc}{2} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{b^2 + c^2} = \frac{\pi bc}{3}\sqrt{b^2 + c^2}.$$

4. A figura é a seguinte:



a)

$$x = \frac{6 \cdot 0 + 8 \cdot 4 + 2 \cdot 8 + 4 \cdot 10 + 4 \cdot 12 + 12 \cdot 6}{36} = \frac{52}{9} \cong 5,78$$

$$y = \frac{6 \cdot 3 + 8 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 12 \cdot 0}{36} = \frac{25}{9} \cong 2,78$$

$$G_1 = \left(\frac{52}{9}, \frac{25}{9}\right).$$

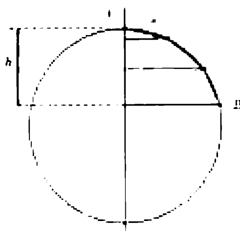
b) Dividindo a figura nos dois retângulos como mostra a figura, temos:

$$x = \frac{48 \cdot 4 + 16 \cdot 10}{64} = \frac{11}{2} = 5,5$$

$$y = \frac{48 \cdot 3 + 16 \cdot 2}{64} = \frac{11}{4} = 2,75$$

$$G_2\left(\frac{11}{2}, \frac{11}{4}\right).$$

5. Seguindo o processo descrito no ítem 12.9, consideremos um arco $AB$ com o ponto $A$ no pólo norte e $B$ qualquer sobre a circunferência. Considere ainda uma poligonal regular inscrita em $AB$ com $n$ segmentos de comprimento $a$ e, sejam ainda $h_1, h_2, \ldots, h_n$, as projeções desses segmentos no eixo.



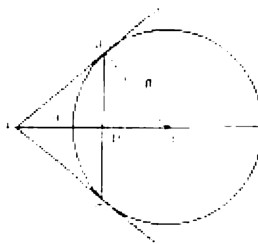
A distancia do centro de gravidade desta poligonal ao eixo é

$$x = \frac{zh_1 + zh_2 + \cdots + zh_n}{na} = \frac{zh}{na}.$$

Se $L$ é o comprimento do arco $AB$, fazendo $n \to \infty$ ficamos com $x = \frac{Rh}{L}$. Logo, a área da calota gerada pela rotação do arco $AB$ é:

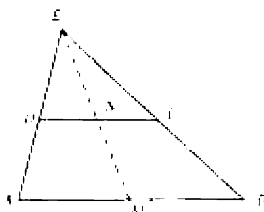
$$A = 2\pi x L = 2\pi \frac{Rh}{L} L = 2\pi Rh.$$

6. O astronauta vê uma calota do nosso planeta. A figura a seguir mostra a situação.



Como a área da calota é igual a 1/6 da área da Terra, temos $2\pi Rh = \frac{1}{6}\cdot 4\pi R^2$, ou seja, $h = \frac{R}{3}$. Portanto, a distância do centro à corda $BC$ (diâmetro da base da calota) é $OD = \frac{2R}{3}$. No triângulo retângulo $BOA$, tem-se $OB^2 = OA\cdot OD$, ou seja, $R^2 = (d+R)\frac{2R}{3}$, o que fornece $d = \frac{R}{2} = 3200km$.

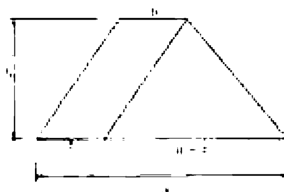
7. Seja $ABCD$ o nosso trapézio com bases $AB$ e $CD$. Seja $E$ o ponto de interseção das retas $AD$ e $BC$.



Se $M$ é o ponto médio de $AM$ então $EM$ corta $CD$ no seu ponto médio $N$. Os baricentros dos triângulos $EAB$ e $EDC$ estão sobre $EM$. Logo, o baricentro do trapézio também está sobre essa reta. Concluímos então que:

"O baricentro do trapézio está sobre o segmento que une os pontos médios das bases".

Com isso, basta determinar a sua distância à base maior. Sejam $a$ e $b$ $(a > b)$ as bases do trapézio e seja $h$ sua altura. Dividamos então o trapézio em um paralelogramo e um triângulo como mostra a figura a seguir.



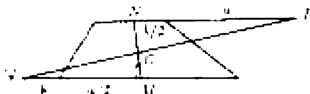
As áreas das duas partes são $S_1 = bh$ e $S_2 = \frac{(a-b)h}{2}$. A distância do baricentro do trapézio à base maior é

$$y = \frac{bh \cdot \frac{h}{2} + \frac{(a-b)h}{2} \cdot \frac{h}{3}}{\frac{(a+b)h}{2}}$$

que, após da simplificação, dá

$$y = \frac{(a+2b)h}{3(a+b)}.$$

Uma construção possível é a seguinte. Prolongamos a base maior de um comprimento igual à base menor e prolongamos a base menor (no sentido oposto) de um comprimento igual à base maior. O segmento que une as extremidades desses prolongamento corta o segmento que une os pontos médios das bases em $G$. Este ponto é o baricentro do trapézio como veremos a seguir.



A semelhança dos triângulos $GMQ$ e $GNP$ fornece

$$\frac{b + \frac{a}{2}}{\frac{b}{2} + a} = \frac{y}{h - y}.$$

Fazendo as contas encontramos exatamente

$$y = \frac{(a+2b)h}{3(a+b)}.$$

# Parte III

# CAPÍTULO 1

## Geometria Analítica Plana

### 1.1 Exercícios

1. A reta $r$ contém os pontos $(4,2)$ e $(7,3)$.

   a) Determine $k$ para o ponto $(16,k)$ pertença a $r$.

   b) Verifique se o ponto $(1997,666)$ está acima ou abaixo de $r$.

2. Encontre a equação da reta que contém os pontos $(a,0)$ e $(0,b)$.

3. Sejam $A = (a,a')$ e $B = (b,b')$. Determine o ponto $P$, interior ao segmento $AB$, tal que $d(A,P) = \frac{1}{3} \cdot d(A,B)$

4. Prove que as medianas de um triângulo concorrem em um ponto, que divide a cada uma delas na razão $1/3$.

5. $ABCD$ é um paralelogramo. Se $A = (a,a')$, $B = (b,b')$ e $C = (c,c')$, determine $D$.

6. Prove que um quadrilátero é um paralelogramo se, e somente se os pontos médios de suas diagonais coincidem.

7. Prove que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem comprimento igual a metade deste.

8. Prove que o segmento que une os pontos médios dos lados opostos não paralelos de um trapézio é igual a semi-soma das bases.

9. Prove que os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer são vértices de um paralelogramo.

10. Prove que a soma dos quadrados dos lados dde um paralelogramo é igual a soma dos quadrados de suas diagonais.

11. Determine a equação do lugar geométrico dos pontos que eqüidistam dos pontos $(1,3)$ e $5,1$.

12. Determine a equação do lugar geométrico dos pontos que eqüidistam do eixo $OX$ e do ponto $(0,2)$.

13. São dados dois pontos $A$ e $B$. Determine o lugar geométrico de $P$ tal que $d(A,P)^2 + d(P,B)^2 = k^2$ onde $k$ é uma constante dada. Se $d(A,B) = 2a$, determine para que valores de $k$ o problema tem solução.

14. São dados dois pontos $A$ e $B$. Determine o lugar geométrico de $P$ tal que $d(A,P)^2 - d(P,B)^2 = k^2$ onde $k$ é uma constante dada.Determine ainda para que valores de $k$ o problema tem solução.

15. Determine a equação da bissetriz do menor ângulo formado pelas retas $y = x$ e $y = 7x$.

16. Sejam $d$ e $d'$ as distâncias de um ponto $P$ às retas $y = 0$ e $y = x$, respectivamente. Determine o lugar geométrico de $P$ tal que $d - d' = 1$.

17. Um segmento $AB$ de comprimento $l$ move-se de forma que $A$ está sobre $OX$ e $B$ sobre $OY$. Determine o lugar geométrico do ponto médio de $AB$.

18. Sejam $O = (0,0)$ e $Q$ um ponto que percorre a reta $x = 2$. Determine o lugar geométrico de $P$, sobre o segmento $OQ$, e de forma que $d(0,p) \cdot d(0,Q) = 4$.

19. Sejam $O = (0,0)$ e $r$ a reta $ax + by = c$. O ponto $Q$ percorre a reta $r$ e o ponto $P$ é tal que $\overrightarrow{OP} = 3 \cdot \overrightarrow{OQ}$. Determine o lugar geométrico de $Q$.

20. Para que valor de $k$ as retas $2x + 5y = 7$, $3x + ky = 1$ são

    a) paralelas?

    b) perpendiculares?

21. Calcule $m$ para que as retas $2x + 3y = 8$, $4x + 7y = 18$ e $5x + my = 3$ passem por um mesmo ponto.

22. Sendo $A = (1, 4)$ e $B = (3, 0)$ determine a equação da mediatriz do segmento $AB$.

23. Determine o ponto $P$ da reta $x + 3y = -15$ que eqüidista dos pontos $A = (1, 4)$ e $B = (3, 0)$.

24. Determine o simétrico do ponto $A = (3, 4)$ em relação à reta $x + 2y = 1$

25. Calcule a área do triângulo cujos vértices são $A = (3, 4)$, $B = (1, 1)$ e $C = (7, 3)$.

26. Em um quadrado $ABCD$, o ponto $M$ é médio do lado $CD$. Determine o cosseno do ângulo $A\widehat{M}B$.

27. Os pontos $(2, 3)$, $(3, 1)$ e $(9, y)$ são vértices consecutivos de um retângulo. Determine o quarto vértice.

28. Sobre os vetores $u$ e $v$ sabe-se que $|u| = 4$, $|v| = 5$ e $|u + v| = 6$. Calcule $\langle u, v\rangle$.

29. Os pontos $(5, 1)$ e $(8, 3)$ são vértices consecutivos de um quadrado continuo no primeiro quadrante. Determine os outros dois vértices.

30. Os pontos $A = (a, a')$ e $C = (c, c')$ são vértices opostos de um quadrado. Determine os outros dois vértices.

31. Dados $A = (3, 7)$, $B = (1, 1)$ e $C = (9, 6)$, determine a projeção ortogonal de $A$ sobre a reta $BC$.

32. Para cada valor real de $m$, a equação $mx + (m - 1)y + (2 - m) = 0$ representa uma reta. Mostre que essas retas passam por um mesmo ponto.

33. O que significa a equação $(x + y - 3)(3x - y - 1) = 0$?

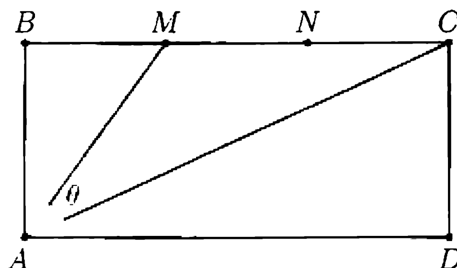
34. Para cada real $k$, $R_k$ é um objeto que tem equação $x + y - 3 + k(3x - y - 1) = 0$. Descreva o conjunto dos $R_k$.

35. O que significa no plano cartesiano a equação $x^3y - xy^3 = 0$?

36. Seja $\theta$ o menor ângulo formado pelas retas $y = ax + b$ e $y = a'x + b'$. Mostre que

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{a - a'}{1 + aa'}\right|.$$

37. A figura abaixo mostra um retângulo $ABCD$ onde $AB = BM = MN = NC$. Calcule $\operatorname{tg}\theta$.




38. Encontre os pontos da reta $y = x + 1$ que distam 5 unidades da reta $8x + 6y = -5$.

39. Determine as retas que passam pelo ponto $(7, 4)$ e fazem $45°$ com a reta $x - 3y = 0$.

40. Obtenha um ponto da reta $2x - y = 0$ que forme com os pontos $(1, 0)$ e $(3, 1)$ um triângulo de área 5.

41. Determine o ortocentro do triângulo cujos vértices são $(-3, 0)$, $(0, 6)$ e $(2, 0)$.

42. Determine para que valores de $m$ a equação $x^2 + y^2 \quad 2\sqrt{m}x - 12y + 3m = 0$ representa uma circunferência.

43. Encontre a equação da circunferência que contém os pontos $(10, 7)$, $(2, -9)$ e $(-4, 9)$.

44. Determine os pontos de interseção das circunferências $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0$ e $x^2 + y^2 - x - 4y - 3 = 0$.

45. Sejam $O = (0, 0)$ e $\Gamma$ a circunferência de centro $(2, 1)$ e raio 1.

a) Determine as retas que passam por 0 e são tangentes a $\Gamma$.

b) Determine os pontos de tangência.

46. Determine para que valores de $k$ a reta $y = kx$ é tangente à circunferência $x^2 + y^2 - 20x + 36 = 0$.

47. Determine os pontos de interseção da reta $x + y = 5$ com a circunferência $x^2 + y^2 = 13$.

48. Seja $P(x, y) = x^2 + y^2 + ax + by + c$ onde $a^2 + b^2 - 4c > 0$. Desta forma, $P(x, y) = 0$ representa uma circunferência $\Gamma$. Mostre que:

a) Se $P(x_0, y_0) < 0$ então o ponto $(x_0, y_0)$ é interior a $\Gamma$.

b) Se $P(x_0, y_0) > 0$ então o ponto $(x_0, y_0)$ é exterior a $\Gamma$.

**Observação:** $P(x_0, y_0)$ chama-se *potência* do ponto $(x_0, y_0)$ em relação a $\Gamma$.

49. Sejam $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ duas circunferências secantes e seja $r$ uma reta que contém os pontos de interseção. Prove que todo ponto de $r$ tem mesma potência em relação às duas circunferências.

50. Seja $P$ um ponto exterior a uma circunferência $\Gamma$. Prove que a potência de $P$ em relação a $\Gamma$ é o quadrado do segmento de tangente traçada de $P$ até $\Gamma$.

51. Sejam $a_1$, $a_2$, $b_1$ e $b_2$ números reais. Prove que

$$|a_1b_1 + a_2b_2| \leq \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)}$$

e que a igualdade ocorre se e somente se $a_1 = tb_1$ e $a_2 = tb_2$ para algum $t$ real.

52. Calcule o raio da circunferência inscrita em um triângulo retângulo cujos catetos medem $b$ e $c$.

53. Mostre que as bissetrizes dos 4 ângulos formados por duas retas concorrentes estão contidas em retas perpendiculares.

54. Seja $A$ a área do paralelogramo construído sobre os lados $PQ$ e $PR$. Escreva $\overrightarrow{PQ} = u = (\alpha, \beta)$ e $\overrightarrow{PR} = v = (\gamma, \delta)$. A partir da igualdade

$$A^2 = |u|^2|v|^2 - \langle u, v\rangle^2 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2$$

e conclua que $A = |\alpha\delta - \beta\gamma|$. Obtenha assim uma nova dedução para a formula da área de um triângulo.

## 1.2 Soluções

1. A inclinação da reta $r$ é $a = \frac{3-2}{7-4} = 1/3$. Como ela passa pelo ponto $(4, 2)$, sua equação é $y = 2 + \frac{1}{3}(x - 4)$, ou $y = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$, ou ainda $x - 3y = -2$.

   a) O ponto $(16, k)$ pertence a $r$ se , e somente se, $16-3k = -2$, isto é, $3k = 18$, donde $k = 6$.

   b) O ponto de $r$ com abscissa 1997 tem ordenada $y = \frac{1997+2}{3} = 666\frac{1}{3}$, logo o ponto $(1997, 666)$ está abaixo de $r$.

2. A inclinação dessa reta é $\frac{0-b}{a-0} = -b/a$. Ela passa pelo ponto $(a, 0)$. Logo, sua equação é $y = 0 - \frac{b}{a}(x-a) = -\frac{b}{a}x+b$, ou então $bx+ay = ab$. Usualmente, esta equação é escrita sob a forma $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$. Evidentemente, estamos supondo $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Se um destes dois números é zero, a reta coincide com um dos eixos. Se ambos forem zeros, qualquer reta que passe pela origem resolve o problema.

3. As coordenadas do ponto $P = (x, y)$ são $x = \left(1 - \frac{1}{3}\right) a + \frac{1}{3}b$ e $y = \left(1 - \frac{1}{3}\right) a' + \frac{1}{3}b'$, ou seja, $x = (2a + b)/3$ e $y = (2a' + b')/3$.

4. Sejam $A = (a, a')$, $B = (b, b')$ e $C = (c, c')$ os vértices do triângulo e $M = \left(\frac{b+c}{2}, \frac{b'+c'}{2}\right)$ o ponto médio do lado $BC$. O ponto $P$ da mediana $AM$ tal que $d(P, M)/d(A, M) = 1/3$ tem coordenadas $\left(1 - \frac{1}{3}\right) \frac{b+c}{2} + \frac{1}{3}a = \frac{a+b+c}{3}$ e $\left(1 - \frac{1}{3}\right) \frac{b'+c'}{2} + \frac{1}{3}a' = \frac{a'+b'+c'}{3}$, logo

$$P = \left(\frac{a+b+c}{3}, \frac{a'+b'+c'}{3}\right)$$

   Se calculamos as coordenadas dos pontos das outras medianas que as dividem na mesma razão encontraremos que esses pontos coincidem com $P$. Logo $P$ está nas três medianas.

5. Admitindo que os vértices $A$, $B$, $C$ e $D = (x, y)$ são enumerados consecutivamente, $AC$ e $BD$ são diagonais do paralelogramo logo seus pontos médios coincidem. Temos então $\frac{a+b}{2} = \frac{b+x}{2}$ e $\frac{a'+d}{2} = \frac{b'+y}{2}$. Daí vem $x = a + c \quad b$ e $y = a' + c' - b'$. Estas são as coordenadas do quarto vértices $D$.

6. Escolhendo os eixos de modo que $A = (0, 0)$ e $B = (b, 0)$, os outros dois vértices do paralelogramo $ABCD$ são $C = (c, c')$ e $D = (d, c')$. Como $AD$ e $BC$ têm a

mesma inclinação, temos $c'/d = c'/(c-b)$, donde $c = b+d$. As coordenadas do ponto médio da diagonal $AC$ são $c/2$ e $c'/2$, enquanto as da diagonal $BD$ são $(b+d)/2$ e $c'/2$. Logo esses pontos médios coincidem.

Reciprocamente, se os pontos médios das diagonais coincidem então $c = b+d$ e $c' = d'$, logo o segmento $CD$ é horizontal (portanto paralelo a $AB$) e, como $c-b = d$, $BC$ e $AD$ têm inclinações iguais, portanto são paralelos e o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo.

7. Dado o triângulo $ABC$, tome um sistema de coordenadas no qual $A = (0,0)$, $B = (b,0)$ e $C = (c,c')$. Os pontos médios de $AC$ e $BC$ são respectivamente $M = \left(\frac{c}{2}, \frac{c'}{2}\right)$ e $N = \left(\frac{b+c}{2}, \frac{c'}{2}\right)$. $M$ e $N$ têm ordenadas iguais, logo $MN$ é paralelo ao eixo das abscissas, isto é, a $AB$. Além disso, é claro que $\overline{MN} = |b|/2 = \overline{AB}/2$.

8. Dado o trapézio $ABCD$, no qual os lados paralelos são $AB$ e $CD$, tome um sistema de eixos de modo que $A = (0,0)$, $B = (b,0)$, $C = (c,c')$ e $D = (d,c')$. Os pontos médios dos lados $AD$ e $BC$ são respectivamente $M = \left(\frac{d}{2}, \frac{c'}{2}\right)$ e $N = \left(\frac{b+c}{2}, \frac{c'}{2}\right)$. Na escolha dos eixos, podemos admitir que $b > 0$ e $c > d$. Então os comprimentos dos lados paralelos são $\overline{AB} = b$, $\overline{CD} = c-d$ enquanto o segmento $MN$ tem comprimento $\overline{MN} = (b+c-d)/2$. Logo $\overline{MN} = (\overline{AB} + \overline{CD})/2$.

9. Dado o quadrilátero $ABCD$, com $A = (a,a')$, $B = (b,b')$, $C = (c,c')$ e $D = (d,d')$, sejam $M$, $N$, $P$, $Q$ respectivamente os pontos médios dos lados $AB$, $BC$, $CD$ e $DA$. As diagonais do quadrilátero $MNPQ$ são os segmentos $MN$ e $NQ$, cujos pontos médios coincidem pois suas coordenadas são $\frac{a+b+c+d}{2}$, $\frac{a'+b'+c'+d'}{2}$. Logo $MNPQ$ é um paralelogramo.

10. Escolhe-se um sistema de coordenadas no qual $A$ é a origem de $AB$ está sobre o eixo das abscissas. Então $A = (0,0)$, $B = (b,0)$, $C = (b+d,c)$ e $D = (d,c)$. Logo $\overline{Ab}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = b^2 + (d^2+c^2) + b^2 + (d^2+c^2) = 2(b^2+c^2+d^2)$. Esta é a soma dos quadrados dos lados do paralelogramo $ABCD$. A soma dos quadrados das diagonais é $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = (b+d)^2 + c^2 + (b-d)^2 + c^2 = 2(b^2+c^2+d^2)$.

11. Um ponto $P = (x,y)$ pertence ao lugar geométrico procurado se, e somente se, $(x-1)^2 + (y-3)^2 = (x-5)^2 + (y-1)^2$. Simplificando, obtém-se $2x - y = -4$, portanto o lugar geométrico é uma reta.

12. A equação procurada é $y^2 = x^2+(y-2)^2$. Simplificando, tem-se $x^2-4y+4=0$, ou ainda, $y = \frac{x^2}{4}+1$. (Equação de uma parábola.)

13. Um sistema de coordenadas que simplifica as contas e trata igualmente os pontos $A$ e $B$ é aquele em que $A=(-a,0)$ e $B=(a,0)$. O ponto $P=(x,y)$ pertence ao lugar geométrico procurado se, e somente se, $(x+a)^2+y^2+(x-a)^2+y^2 = k^2$, ou seja (simplificando): $x^2+y^2 = \frac{k^2}{2}-a^2$. (Note que $d(A,B)=2a$.) Se $k^2 < 2a^2$, o lugar geométrico é vazio. Se $k^2 = 2a^2$, o único pontos nele contido é a origem, isto é (nos termos do problema proposto), o ponto médio do segmento $AB$. E se $k^2 > 2a^2$, o lugar geométrico é a circunferência cujo centro é o ponto médio do segmento $AB$ e cujo raio mede $\sqrt{k^2-2a^2} = \sqrt{k^2-d(A,B)^2/2}$.

14. Procedendo como acima, encontramos que a equação do lugar geométrico procurado é $(x+a)^2+y^2-(x-a)^2-y^2 = k^2$, ou seja, $4ax = k^2$, ou ainda, $x = k^2/4a$. O lugar geométrico procurado é, portanto, uma reta perpendicular ao segmento $AB$. O problema tem solução seja qual for o valor de $k$.

15. Sejam $A=(5,5)$ e $B=(1,7)$. Estes pontos estão sobre as retas $y=x$ e $y=7x$ respectivamente, ambos à distância $\sqrt{50}$ da origem 0. Logo o triângulo $OAB$ e isósceles e $M=(3,6)$, ponto médio do lado $AB$, é o pé da mediana $OM$, logo $OM$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$. Portanto a equação da bissetriz é $y=2x$. Como o ângulo $A\hat{O}B$ é agudo (contido no 1º quadrante) ele é o menor ângulo pelas duas retas dadas.

16. O lugar geométrico que se pede é a bissetriz do menor ângulo formado pelas retas $y=x$ e $y=1$, logo é a reta de equação $y = 1+(\sqrt{2}-1)(x-1)$.

17. Temos $A=(0,y)$ e $B=(x,0)$, logo $l^2 = \overline{AB}^2 = x^2+y^2$. O ponto médio de $AB$ é $M = (\frac{x}{2},\frac{y}{2})$. Portanto $\overline{DM}^2 = l^2/4$. Ao variar $x$ e $y$ (mantendo $x^2+y^2 = \frac{l^2}{4}$), $M$ descreve a circunferência de centro na origem e raio $l/2$.

18. Seja $P=(x,y)$. Como $Q$ é o ponto de abscissa 2 da reta $OP$, cuja inclinação é $y/x$, tem-se $Q=(1,2y/x)$. Então $d(O,P)^2 = x^2+y^2$ e $d(O,Q)^2 = 4(1+y^2/x^2)$. Portanto

$$d(O,P)^2\cdot d(O,Q)^2 = 4(x^2+y^2)(1+y^2/x^2) = \frac{4}{x^2}(x^2+y^2)^2.$$

Logo $d(O,P)\cdot d(O,Q) = \frac{2}{x}(x^2+y^2)$. A condição $d(O,P)\cdot d(O,Q) = 4$ significa então $\frac{2}{x}(x^2+y^2) = 4$, ou seja, $x^2+y^2 = 2x$, ou ainda $x^2-2x+y^2=0$.

Completando o quadrado, isto se escreve como $(x-1)^2+y^2-1=0$, isto é, $(x-1)^2+y^2=1$. Portanto o lugar geométrico procurado é a circunferência de raio 1 com centro no ponto $A=(1,0)$.

19. Se $P=(x,y)$ então $Q=(x/3,y/3)$. Como $Q$ pertence à reta $r$, temos $a(x/3)+b(x/3)=c$, donde $ax+by=3c$. Esta é a equação do lugar geométrico dos pontos $P$, o qual é, portanto, uma reta paralela a $r$.

20. Para que as retas dadas sejam paralelas, devemos ter $\frac{2}{3}=\frac{5}{k}$, donde $k=7,5$.

21. As retas $2x+3y=8$ e $4x+7y=18$ têm em comum o ponto (1,2) pois $x=1$, $y=2$ é a solução do sistema formado pelas equações que as representam. A fim de que a reta $5x+my=3$ contenha o ponto (1,2), deve ser $5\cdot1+m\cdot2=3$, donde $m=-1$.

22. A inclinação de $AB$ é $\frac{0-4}{3-1}=-2$. O ponto médio de $AB$ é $M=\left(\frac{1+3}{2},\frac{0+4}{2}\right)=(2,2)$. A mediatriz de $AB$ é a reta perpendicular a $AB$ (portanto de inclinação 1/2) passando por $M$. Sua equação é $y=2+\frac{1}{2}(x-2)$, ou seja, $y=\frac{1}{2}x+1$.

23. O ponto procurado é a interseção da reta $x+3y=-15$ com a mediatriz do segmento $AB$. Ora, a equação da mediatriz é $y=\frac{1}{2}x+1$, como vimos acima. Resolvendo o sistema formado por estas duas equações obtemos $x=-33/5$ e $y=-14/5$. Estas são as coordenadas do ponto procurado.

24. Seja $A^*$ o ponto procurado. A reta $r$, de equação $x+2y=1$, é a mediatriz do segmento $AA^*$. A inclinação da reta $AA^*$ é, portanto, igual a 2. Ela passa pelo ponto $A=(3,4)$, logo sua equação é $2x-y=2$. Resolvendo o sistema $x+2y=1$, $2x-y=2$ encontramos a interseção $M=(1,0)$ das retas $r$ e $AA^*$. $M$ é o ponto médio do segmento $AA^*$. Logo $A^*=(-1,-4)$.

25. A área do triângulo $ABC$ é o valor absoluto da metade do determinante da matriz $\begin{bmatrix} 3-1 & 7-1 \\ 4-1 & 3-1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, logo é igual a 7.

26. Considere o sistema de coordenadas no qual $A=(0,0)$, $B=(1,0)$, $C=(1,1)$, $D=(0,1)$ e $M=(1/2,1)$. Então os vetores $u=\overrightarrow{MA}$ e $v=\overrightarrow{MB}$ têm coordenadas $u=(-1/2,-1)$ e $v=(1/2,-1)$, logo seu produto interno é $\langle u,v\rangle=(-1/2)(1/2)+(-1)(-1)=3/4$. Por outro lado, $|u|=\sqrt{5/4}=|v|$, logo $\langle u,v\rangle=|u||v|\cos\alpha=(5/4)\cdot\cos\alpha$. Assim, $(5/4)\cdot\cos\alpha=3/4$, portanto $\cos\alpha=3/5$. (Estamos escrevendo $\alpha=A\widehat{M}B$.)

27. Sejam $A = (2,3)$, $B = (3,1)$ e $C = (9,y)$. Quer-se determinar o quarto vértice $D$ do retângulo $ABCD$. Sejam $u = \overrightarrow{BA} = (-1,2)$ e $v = \overrightarrow{BC} = (6, y-1)$. Como $\langle u, v\rangle = (-1)\cdot 6 + 2(y-1) = 0$, concluímos que $y = 4$, logo $v = (6,3)$. Assim $u + v = (5,5)$ e $D = B + u + v = (8,6)$.

28. Sabemos que $|u+v|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = |u|^2 + |v|^2 + 2\langle u,v\rangle$, portanto $\langle u,v\rangle = \frac{1}{2}(|u+v|^2 - |u|^2 - |v|^2)$. Pelos dados do exercício, temos então $\langle u,v\rangle = \frac{1}{2}(26 - 16 - 25) = -5/2$.

29. Conhecemos os vértices $A = (5,1)$ e $B = (8,3)$ do quadrado $ABCD$ no qual $A$, $B$, $C$ e $D$ são enumerados no sentido anti-horário. Seja $u = \overrightarrow{AB} = (3,2)$. Como $v = \overrightarrow{AD}$ é obtido de $u$ por rotação de 90° no sentido anti-horário, temos $v = (-2,3)$. Logo $D = A + v = (5,1) + (-2,3) = (3,4)$. Finalmente $C = B + v = (8,3) + (-2,3) = (6,6)$. Estes são os vértices $C$ e $D$ que faltavam.

30. Seja $M = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a'+b'}{2}\right)$ o ponto médio de $AC$. Enumerando os vértices do quadrado $ABCD$ na seqüencia anti-horário, se $u = \overrightarrow{MC} = \left(\frac{c-a}{2}, \frac{c'-a'}{2}\right)$ então $v = \overrightarrow{MD} = \left(\frac{a-c}{2}, \frac{c-a}{2}\right)$ e $D = M + v = \left(\frac{a+a'+c-c'}{2}, \frac{a'+c'+c-a}{2}\right)$. Por sua vez,

$$B = M - v = \left(\frac{a - a' + c + c'}{2}, \frac{a + a' - c + c'}{2}\right).$$

31. A projeção ortogonal do ponto $A$ sobre a reta $BC$, cuja equação é $5x - 8y = -3$, é o ponto de interseção dessa reta com a perpendicular baixada de $A$ sobre ela, a qual tem a equação $8x + 5y = 59$. Resolvendo o sistema formado por essas duas equações, encontramos $x = 457/89$, $y = 319/89$, que são as coordenadas da projeção procurada.

32. Fazendo sucessivamente $m = 0$ e $m = 1$ na equação dada, obtemos as retas $y = 2$ e $x = -1$, as quais têm o ponto $P = (-1,2)$ em comum. Uma substituição direta mostra que, para todo valor real de $m$, o ponto $P = (-1,2)$ pertence à reta $mx + (m-1)y + 2 - m = 0$.

33. Tem-se $(x + y - 3)(3x - y - 1) = 0$ se, e somente se $x + y - 3 = 0$ ou $3x - y - 1 = 0$. Logo a equação dada representa o conjunto formado pela reunião das retas $3x - y = 1$ e $x + y = 3$.

34. Escrevendo $x + y - 3 + k(3x - y - 1) = (3k+1)x + (1-k)y - k - 3$, vemos que cada $R_k$ é a reta de equação $(3k+1)x + (1-k)y = k + 3$. Tomando sucessivamente

$k=0$ e $k=1$, obtemos as retas $x+y=3$ e $x=1$ respectivamente, as quais têm o ponto $P=(1,2)$ em comum. Vê-se imediatamente que $P$ pertence a todas as retas $R_k$. Reciprocamente, toda reta $r$ que passa pelo ponto $P=(1,2)$ e tem inclinação diferente de 3 (isto é, não é a reta $3x-y-1=0$) é da forma $R_k$ para algum $k$. Com efeito, se $r$ é vertical e contém $P$, sua equação é $x=1$, logo $r=R_1$. E se $r$, passando por $P$, não é vertical nem tem inclinação 3, sua equação é $y=mx+2-m$, com $m\neq 3$, tomando $k=(1+m)/(m-3)$ temos $(3k+1)/(k-1)=m$ e $(k+3)(1-k)=2-m$, logo $r=R_k$. Assim o conjunto das $R_k$ é formado por todas as retas que passam pelo ponto $P=(1,2)$, exceto a reta $y=3x-1$.

35. Como $x^3y = xy^3 = xy(x+y)(x-y)$, tem-se $x^3y - xy^3 = 0$ se, e somente se, $xy=0$, ou $x+y=0$, ou $x-y=0$. Portanto a equação dada representa a reunião dos dois a as duas diagonais do plano.

36. As inclinações $a$ e $a'$ são as tangentes dos ângulos que o eixo $OX$ forma com as retas dadas e $\theta$ é a diferencia entre esses ângulos, ou o suplemento dessa diferença, (o que for agudo entre estes dois). Logo $\operatorname{tg}\theta = |(a-a')/(1+aa')|$ de acordo com a conhecida fórmula da tangente da diferencia.

37. Pelo exercício anterior, com $a=1$ e $a'=1/3$, temos $\operatorname{tg}\theta = 1/2$.

38. A distância de um ponto $P=(x,y)$ à reta $8x+6y=-5$ é $|8x+6y+5|/10$. Portanto os pontos do plano que distam 5 dessa reta são os pontos das retas $8x+6y+5=50$ e $-8x-6y-5=50$, ou seja $8x+6y=45$ e $8x+6y=-55$, as quais cortam a reta $y=x+1$ nos pontos $P_1=(39/14, 53/14)$ e $P_2=(-61/14,-47/14)$ respectivamente. Estes são os pontos procurados.

39. As retas procuradas passam pelo ponto $(7,4)$ e não são verticais, logo suas equações são da forma $y=4+m(x-7)$, ou seja, $mx-y=7m-4$. O ângulo que uma delas forma com a reta $x-3y=0$ tem cosseno igual a $\pm\frac{m+3}{\sqrt{10}\sqrt{1+m^2}}$. Como $\cos 45^\circ = \sqrt{2}/2$, devemos ter $\frac{m+3}{\sqrt{10}\sqrt{1+m^2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ donde $\frac{m^2+6m+9}{10+10m^2} = \frac{1}{2}$, ou seja, $2m^2-3m-2=0$. Esta equação nos dá $m=2$ ou $m=-1/2$. Portanto as retas procuradas são $y=2x-10$ e $x+2y=15$.

40. Os pontos da reta dada tem coordenadas $(x,2x)$. Sejam $A=(1,0)$, $B=(3,1)$ e $C=(x,2x)$. A área do triângulo $ABC$ é igual ao valor absoluto de

$\frac{1}{2} \cdot \det \begin{bmatrix} x & 1 & 2x \\ & 2 & & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(3x+1)$. Portanto, devemos ter $3x + 1 = 10$ ou $-3x - 1 = 10$. Assim, $x = 3$ ou $x = -11/3$. Os pontos procurados são, por conseguinte $P_1 = (3,6)$ ou $P_2 = (-11/3, -22/3)$.

41. Sejam $A = (-3,0)$, $B = (2,0)$ e $C = (0,6)$. O ortocentro do triângulo $ABC$ é a interseção das 3 alturas. Uma delas é o eixo $OY$. Outra é a reta $AD$, que passa por $A$ e é perpendicular a $BC$. Como a inclinação de $BC$ é $-3$, a inclinação de $AD$ é $1/3$, logo sua equação é $y = \frac{1}{3}(x+3)$, ou seja, $x - 3y = -3$. Sua interseção com a altura $OY$ é o ponto em que $x = 0$, ou seja, $-3y = -3$, o que nos dá $y = -1$. Portanto o ortocentro de $ABC$ é o ponto $(0,-1)$.

42. Completando os quadrados, a equação dada se escreve como $(x - \sqrt{m})^2 + (y - 6)^2 = 36 - 2m$. Portanto devemos ter $36 - 2m > 0$, ou seja $m < 18$. Como ocorre $\sqrt{m}$ entre os dados da questão, deve ser também $m \geq 0$. Assim, a resposta é $0 \leq m < 12$.

43. Sejam $A = (10,7)$, $B = (2,-9)$, $C = (-4,9)$. O centro da circunferência que contém os pontos $A$, $B$ e $C$ é a interseção das mediatrizes $AB$ e $AC$. Ora, a mediatriz de $AB$ tem equação $x + 2y = 4$ e a equação da mediatriz de $AC$ é $7x - y = 13$. A interseção das duas mediatrizes é o ponto $P = (2,1)$. O raio da circunferência é a distância de $P$ a qualquer dos pontos $A$, $B$ ou $C$, logo é $AD$. A equação pedida é, portanto $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 100$.

44. Subtraindo a segunda equação da primeira encontramos $3x + 6y = 0$, ou seja, $x = -2y$. Portanto, os pontos comuns às duas circunferências cumprem $x = -2y$. Fazendo esta substituição em qualquer das duas equações dadas, chegamos à condição $5y^2 - 2y - 3 = 0$, que só é satisfeita para $y = 1$ ou $y = -3/5$. Como $x = -2y$, concluímos que os pontos comuns às duas circunferências são $P_1 = (-2,1)$ e $P_2 = (6/5, -3/5)$.

45. Escrita por extenso, a equação da circunferência dada é $x^2 - 4x + y^2 - 2y + 4 = 0$. Sua interseção com a reta $y = ax$ é definida pela equação $x^2 - 4x + (ax)^2 - 2ax + 4 = 0$, ou seja, $(1 + a^2)x^2 - (4 + 2a)x + 4 = 0$. Para que a reta $y = ax$ seja tangente a $\Gamma$, esta última equação deve ter uma só raiz real. A condição para que isto se dê é $(4 + 2a)^2 - 16(1 + a^2) = 0$, o que significa $a = 0$ ou $a = 4/3$. A tangente $y = 0$ é óbvia e o ponto de tangência é (2,0). A tangente $y = 4x/3$ toca $\Gamma$ no ponto de sua interseção com a reta $y = 1 - \frac{3}{4}(x-2)$ que

lhe é perpendicular e passa pelo centro $(2,1)$. Fazendo $y = 4x/3$ nesta última equação, obtemos $x = 6/5$ e daí $y = 4x/3 = 8/5$. Portanto $(6/5), 8/5)$ é o ponto de tangência.

46. Substituindo $y$ por $kx$ na equação da circunferência, temos $(1+k^2)x^2 - 20x + 36 = 0$. Se $y = kx$ é tangente, esta equação tem uma só raiz real, o que significa $144(1+k^2) = 400$, donde $k = \pm 4/3$.

47. Se o ponto $P = (x,y)$ pertence à circunferência $x^2+y^2 = 13$ e à reta $x+y=5$ então $(x+y)^2 = 25$, ou seja $x^2+y^2+2xy = 25$ e daí $2xy = 25-(x^2+y^2) = 25-13 = 12$ e $xy = 6$. Assim, $x$ e $y$ são números cuja soma é 5 e cujo produto é 6. Tem-se $x = 2$, $y = 3$, ou então $x = 3$ e $y = 2$, Os pontos procurados são $P_1 = (2,3)$ e $P_2 = (3,2)$.

48. Completando os quadrados, vemos que
$P(x,y) = \left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{a^2+b^2-4c}{4}$. Pondo $A = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$, $R = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$ e $Q = (x,y)$, vem $P(x,y) = d(Q,A)^2 - R^2$, portanto $P(x,y) = 0$ é a equação da circunferência do centro $A$ e raio $R$ e os ítens a) e b) do exercício resultam imediatamente.

49. Lembrando que a potência de um ponto em relação a uma circunferência é a diferencia entre o quadrado da distancia desse ponto ao centro da circunferência e o quadrado do raio da mesma, concluímos que a fórmula que expressa a potência dá o mesmo valor, seja qual for o sistema de coordenadas adotado. Não há perda de generalidade, portanto em supor que uma das circunferências tem centro na origem e raio 1 enquanto o centro da outra é $(a,0)$ e seu raio é $R$. Sejam $(x_0, y_0)$ e $(x_0, -y_0)$ os pontos de interseção das duas circunferências. A reta que os liga é formada pelos pontos $(x_0, y)$, $y \in \mathbb{R}$. A potência do ponto $(x_0, y_0)$, em relação a ambas circunferências é a mesma, igual a zero. Portanto $x_0^2 + y_0^2 = 1$ e $x_0^2 - 2ax_0 + a^2 + y_0^2 = R^2$. Então a potência de qualquer ponto $(x_0, y_0)$ em relação à primeira circunferência é

$$x_0^2 + y^2 - 1 = x_0^2 + y^2 - x_0^2 - y_0^2 = y^2 - y_0^2.$$

A potência desse mesmo ponto $(x_0, y)$ em relação à segunda circunferência é $x_0^2 - 2ax_0 + a^2 + y - R^2 = x_0^2 - 2ax_0 + a^2 + y^2 - (x_0^2 - 2ax_0 + a^2 + y_0^2) = y^2 - y_0^2$. Logo a potência de todos os pontos $(x_0, y)$, $y \in \mathbb{R}$, é a mesma em relação a qualquer das duas circunferências.

50. Seja $Q$ o ponto em que a tangente da origem $P$ toca a circunferência $\Gamma$, que tem centro $A$ e raio $R$. O triângulo $APQ$ é retângulo em $Q$, logo $d(A,P)^2 = d(P,Q)^2 + R^2$ e daí $d(P,Q)^2 = d(A,P)^2 - R^2$ = potência do ponto $P$ em relação à circunferência $\Gamma$.

51. Sejam $u = (a_1, a_2)$ e $v = (b_1, b_2)$ os vetores que têm os números dados como coordenadas. Se um deles for zero, a desigualdade proposta é óbvia. Caso contrário, seja $\alpha$ o ângulo entre $u$ e $v$. Então $|a_1b_1 + a_2b_2| = |\langle u, v\rangle| = |u||v||\cos\alpha| \leq |u||v| = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)}$. Tem-se igualdade se, e somente se, $\cos\alpha = \pm 1$, o que significa que os vetores $u$, $v$ são múltiplos um do outro, isto é, $v = tu$, ou seja $a_1 = tb_1$, $a_2 = tb_2$ para algum $t$ real.

52. Considere um sistema de coordenadas no qual o vértice do ângulo reto é $A = (0,0)$ e os outros dois vértices são $B = (b,0)$ e $C = (0,c)$. Os lados do triângulo $ABC$ são tangentes à circunferência inscrita, logo o centro da mesma é o ponto $P = (x,x)$ tal que a distancia $d(P,BC)$ é igual a $x$. Como a equação da reta $BC$ é $\frac{x}{b} + \frac{y}{c} = 1$, tem-se

$$d(P,BC) = \frac{|\frac{x}{b} + \frac{x}{c} - 1|}{\sqrt{(1/b)^2 + (1/c)^2}} = \frac{1 - (\frac{x}{b} + \frac{x}{c})}{\sqrt{(1/b)^2 + (1/c)^2}},$$

pois o ponto $P$ está abaixo da reta $BC$. Resolvendo a equação $d(P,BC) = x$, obtém-se $x = bc/(b + c + \sqrt{b^2 + c^2})$.

53. Isto é óbvio geometricamente, pois o ângulo entre as duas bissetrizes é a soma das metades de dois ângulos suplementares.

Para resolver o problema analiticamente, tomamos um sistema de coordenadas no qual a origem é o ponto de interseção das duas retas dadas, logo as equações das mesmas são $ax + by = 0$ e $a'x + b'y = 0$. Além disso, como é permitido multiplicar cada uma dessas equações por uma constante, podemos supor que $a^2 + b^2 = 1$ e $a'^2 + b'^2 = 1$. As duas bissetrizes têm as equações $ax + by = a'x + b'y$ e $ax + by = -a'x - b'y$, ou seja: $(a - a')x + (b - b')y = 0$ e $(a + a')x + (b + b')y = 0$. Levando em conta que $a^2 + b^2 = 1$ e $a'^2 + b'^2 = 1$, vemos que $(a - a')(a + a') + (b - b')(b + b') = 0$, logo as duas bissetrizes são perpendiculares.

54. Sabemos que a área do paralelogramo é o produto da base pela altura. A base

é $|u|$ e, se $\theta$ é o ângulo entre os vetores $u$ e $v$, a altura é $|v|\text{sen}\,\theta$. Portanto

$$\begin{aligned} A^2 &= |u|^2 \cdot |v^2| \cdot \text{sen}^2\theta = |u|^2 \cdot |v^2| \cdot (1 - \cos^2\theta) \\ &= |u|^2|v^2| - |u|^2 \cdot |v^2|\cos^2\theta = |u|^2|v^2| - \langle u, v\rangle^2. \end{aligned}$$

Escrevendo $|u|^2 = \alpha^2 + \beta^2$, $|v|^2 = \gamma^2 + \delta^2$ e $\langle u, v\rangle = \alpha\gamma + \beta\delta$, concluímos que $A^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) - (\alpha\gamma + \beta\delta)^2 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2$, logo $A = |\alpha\delta - \beta\gamma|$. A área do triângulo que tem $u$, $v$ como dois de seus lados é, portanto $\frac{1}{2}|\alpha\delta - \beta\gamma|$.

# CAPÍTULO 2

## Geometria Analítica Espacial

### 2.1 Exercícios

1. Um plano vertical $\Pi$ costa os eixos $OX$ e $OY$ nos pontos $A = (3,0,0)$ e $B = (0,-1,0)$. Determine os coeficientes $a$, $b$, $c$, $d$ de modo que um ponto $P = (x,y,z)$ pertença a $\Pi$ se, e somente se, $ax + by + cz = d$.

2. (Certo ou errado?) Quando se passa do sistema de coordenadas $OXYZ$ para o sistema $OXZY$ então (a) Os planos horizontais passam a ser verticais; (b) Os planos verticais passam a ser horizontais.

3. Determine os pontos em que a reta $AB$ intersecta cada um dos planos $\Pi_{xy}$, $\Pi_{yz}$ e $\Pi_{xz}$, sabendo que $A = (1,2,3)$ e $B = (4,5,6)$.

4. sejam $A = (3,5,2)$, $B = (-1,-1,4)$, $C = (2,1,5)$, $D = (0,3,1)$. Mostre que as retas $AB$ e $CD$ têm um ponto em comum e determine as coordenadas desse ponto.

5. Dados $A = (3,5,2)$ e $B = (-1,-1,4)$, determine equações paramétricas para a reta paralela a $AB$ passando pelo ponto $C = (2,1,5)$.

6. Mostre que são reversas as retas $AB$ e $CD$, onde $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, -1, 4)$, $C = (2, 3, -1)$ e $D = (3, 1, 3)$.

7. Escolhendo convenientemente o sistema de coordenadas, prove que o conjunto dos pontos do espaço que são eqüidistastes de dois pontos distintos $A$ e $B$ dados é um plano, chamado o *plano mediador* do segmento $AB$.

8. Use o exercício anterior para provar que, dado um segmento $AB$, o conjunto formado pelo ponto $B$ e mais os pontos $P$ tais que $PB$ é perpendicular a $AB$ é um plano.

9. Prove que a interseção da reta $r$ com uma esfera $S$ de centro $A$ é um conjunto com 0, 1 ou 2 pontos. Mostre ainda que se $r \cap S$ tem um único ponto $P$ então $r$ é perpendicular a $OP$.

10. Sem usar coordenadas, explique o que significa as seguintes afirmações:

    (a) Os vetores $v$ e $w$ são ortogonais; (b) O vetor $v$ é ortogonal à reta $r$; (c) O vetor $v$ é ortogonal ao plano $\Pi$.

11. Sejam $v = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{CD}$ vetores não-nulos. Prove que se tem $w = \lambda \cdot v$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ se, e somente se, os segmentos de reta $AB$ e $CD$ são paralelos ou colineares.

12. Sejam $r = AB$ e $s = CD$ as retas do Exercício 6. Chame de $r'$ a retas paralela a $r$ que passa pelo ponto $C$. Determine o cosseno de *maior* dos ângulos formados por $r'$ e $s$. Usando uma calculadora ou outra tabela, dê um valor aproximado desse ângulo em graus, minutos e segundos.

13. Dados os vetores $v = (\alpha, \beta, \gamma)$ e $w = (\alpha', \beta', \gamma')$, mostre que o vetor

    $$u = (\beta\gamma' - \gamma\beta', \gamma\alpha' - \alpha\gamma', \alpha\beta' - \beta\alpha')$$

    é tal que $\langle u, v\rangle = \langle u, w\rangle = 0$. Em que condições tem-se $u = 0$?

14. Seja $u = (a, b, c)$ um vetor unitário com $abc \neq 0$. Determine o valor de $t$ de modo que, pondo $v = (-bt, at, 0)$ e $w = (act, bct, -1/t)$, os vetores $u$, $v$, $w$ sejam unitários e dois a dois ortogonais. Investigue se a hipótese $abc \neq 0$ pode ser atenuada ou omitida.

15. Sejam $A$ um ponto e $v$, $w$ vetores não-colineares no espaço. Considere um vetor não-nulo $u$, ortogonal a $v$ e $w$ (como no Exercício 13, por exemplo). Chame de $\Pi$ o conjunto dos pontos $P = A + sv + tw$, onde $s$ e $t$ são números reais arbitrários. Mostre que $P \in \Pi$ se, e somente se, $\langle \overrightarrow{AP}, u \rangle = 0$. Conclua que $\Pi$ é um plano. Se $A = (a, b, c)$, $v = (\alpha, \beta, \gamma)$ e $w = (\alpha', \beta', \gamma')$, as coordenadas dos pontos $P = (x, y, z)$ do plano $\Pi$ são dadas por $x = a + s\alpha + t\alpha'$, $y = b + s\beta + t\beta'$ e $z = c + s\gamma + t\gamma'$. Estas são as *equações paramétricas* do plano $\Pi$.

16. Seja $N = (0, 0, 1)$ o pólo norte da *esfera unitária*

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Para todo $P = (x, y, z)$ da esfera $S^2$, exceto o ponto $N$, determina as coordenadas $x'$, $y'$ do ponto $P' = (x', y', 0)$, interseção da semireta $\overrightarrow{NP}$ (de origem $N$, passando por $P$) com o plano horizontal $\Pi_{xy}$. Reciprocamente, para todo $P' = (x', y') \in \Pi_{xy}$, determine as coordenadas do ponto $P = (x, y, z)$ em que o segmento $NP'$ intersecta a esfera $S^2$.

17. Escreva a equação do plano que corta os eixos $OX$, $OY$ e $OZ$ nos pontos $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ e $(0, 0, c)$ respectivamente, supondo $abc \neq 0$.

18. Dados os pontos $A = (1, 1, 2)$, $B = (1, 2, 3)$ e $C = (-1, 2, 1)$, obtenha as coordenadas de algum pontos $P \neq 0$ tal que o segmento $OP$ seja perpendicular ao plano $ABC$. A partir daí, ache uma equação do tipo $ax + by + cz = d$ para esse plano.

19. Resolva o exercício anterior escrevendo, por meio de equações, a condição para que cada um dos pontos $A$, $B$ e $C$ pertença ao plano $ax + by + cz = d$.

20. Dadas as retas paralelas $AB$ e $CD$, ache uma equação para o plano que elas determinam.

21. Qual é a equação do plano tangente, no ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, à esfera de centro $A = (a, b, c)$ e raio $r$?

22. O plano $\Pi$ contém o ponto $A = (a, b, c)$ e a distância da origem a $\Pi$ é $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Qual é a equação do plano $\Pi$.

23. Seja $AA'$ uma diagonal de um cubo e selam $B$, $C$ e $D$ os vértices do cubo mais próximos de $A$.

a) Mostre que $AA'$ é perpendicular ao plano que contém $B$, $C$ e $D$.

b) Se $AA'$ fura o plano $(BCD)$ em $P$, mostre que $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$.

24. Calcule o cosseno do ângulo formado por duas diagonais de um cubo.

25. Encontre 4 pontos $A$, $B$, $C$ e $D$ com as seguintes propriedades:

a) nas coordenadas desses quatro pontos só aparecem os números 0 e 1.

b) $ABCD$ é um tetraedro regular.

26. Determine as coordenadas de 6 pontos que sejam vértices de um octaedro regular

27. Calcule a distância entre duas faces opostas de um octaedro regular de aresta $a$.

28. Determine o simétrico do ponto $(3, 7, 0)$ em relação ao plano $x + 2y - z = 5$.

29. A reta $r$ é dada por suas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t \\ z = 2t - 1 \end{cases}$$

Determine a projeção ortogonal do ponto $P = (1, 2, 5)$ sobre a reta $r$.

30. Determine o ponto do plano $2x + y + 2z = 12$ que está mais próximo da origem.

31. $ABCDE$ é uma pirâmide regular onde a base é o quadrado $ABCD$ de lado 6 e distância de $E$ ao plano da base é igual a 4.

a) encontre as coordenadas dos cinco vértices em um sistema de coordenadas de sua escolha

b) calcule o comprimento das arestas laterais da pirâmide

c) calcule o cosseno do ângulo entre as retas reversas $AE$ e $BC$

d) calcule a distância de um ponto da reta $AD$ ao plano $(EBC)$.

32. Vamos descrever um código que permite transformar uma palavra $P$ de três letras em um vetor $w \in \mathbb{R}^3$. Inicialmente, escolhe-se uma matriz $3 \times 3$. Por exemplo, a nossa "matriz-código" será:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A partir da correspondência:

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | X | Z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |

a palavra $P$ é transformada em um vetor $v$ do $R^3$. Em seguida, o código da palavra $P$ é obtido pela operação $w = Av$.

Por exemplo, a palavra $MAR$ corresponde ao vetor $(12, 1, 17) = v$ que é codificada com $w = Au = (25, 56, 19)$.

Usando o processo acima, decodifique $w = (64, 107, 29)$.

33. Para cada $k \in \mathbb{R}$, o que significa a equação

$$(x + 2y - 3) + k(3x - y - 2) = 0?$$

34. Para cada $k \in \mathbb{R}$, o que significa a equação

$$(x - y + z - 1) + k(2x + y - 3z) = 0?$$

35. Prove que três vetores $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{AC}$, e $w = \overrightarrow{AD}$, com $A$, $B$, $C$ e $D$ situados no mesmo plano, são linearmente dependentes. Prove também que quatro vetores quaisquer no espaço são linearmente dependentes.

36. Prove que duas arestas opostas de um tetraedro regular são ortogonais.

37. Ache o raio da esfera inscrita no tetraedro cujos vértices são $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ e $(0, 0, 3)$.

38. Um plano $\Pi$ tem a seguinte propriedade: se $P$ e $Q$ são pontos de $\Pi$ e $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR}$ então $R$ pertence a $\Pi$. Prove que o plano $\Pi$ passa pela origem.

39. Escreva a equação do plano que passa pelos pontos $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ e $(0,0,c)$, com $abc \neq 0$.

40. Seja $X$ um conjunto no espaço que contêm pelo menor dois pontos. Suponha que $X$ tem a seguinte propriedade: a reta que une dois pontos quaisquer de $X$ está contida inteiramente em $X$. Prove que $X$ é uma reta ou um plano.

## 2.2 Soluções

1. A equação de um plano vertical $\Pi$ é da forma $ax + by = d$. Como o plano vertical $\Pi$ contém os pontos $(3,0,0)$ e $(0,-1,0)$, devemos ter $3a = d$, $-b = d$ e, por subtração, $3a + b = 0$. Tomando $a = 1$, temos $b = -3$, logo a equação de $\Pi$ é $x - 3y = d$. Como esta equação é satisfeita quando $x = 3$ e $y = 0$, devemos ter $d = 3$, portanto $x - 3y = 3$ é a equação procurada.

2. A mudança indicada corresponde a trocar $y$ por $x$ (e vice-versa). Um plano horizontal, cujas equação era $z =$ constante, passa a ter equação $y =$ constante portanto é vertical. A afirmação (a) é correta. Um plano vertical, de equação $ax + by = d$, passa a ter equação $ax + bz = d$, não é horizontal nas novas coordenadas, a menos que se tenha $a = 0$. Logo (b) é falsa.

3. Como $4 - 1 = 3$, $5 - 2 = 3$ e $6 - 3 = 3$, os pontos da reta $AB$ são os da forma $(1 + 3t, 2 + 3t, 3 + 3t)$, com $t \in \mathbb{R}$, Assim, $AB$ corta os planos $\Pi_{xy}$, $\Pi_{yz}$ e $\Pi_{xz}$ respectivamente nos pontos $(-2,-1,0)$, $(0,1,2)$ e $(-1,0,1)$.

4. Os pontos de reta $AB$ são da forma $(3 - 4t, 5 - et, 2 + 2t)$ e os da reta $CD$ são do tipo $(2 - 2s, 1 + 2s, 5 - 4s)$. Num ponto comum a essas duas retas, devemos ter $2 - 2s = 3 - 4t$, $1 + 2s = 5 \quad 6t$ e $5 - 4s = 2 + 2t$, ou seja $2s - 4t = -1$, $2s + 6t = 4$ e $4s + 2t = 3$. As duas primeiras equações dão $s = 1/2$ e $t = 1/2$, valores que também satisfazem a terceira. Logo as duas retas têm em comum o ponto $(1,2,3)$.

5. Como $-1-3 = -4$, $-1-5 = -6$ e $4-2 = 2$, as equações paramétricas pedidas são $x = 2 - 4t$, $y = 1 - et$, $z = 5 + 2t$.

6. Temos $AB = \{(1+2t, 2-3t, 3+t);\ t \in \mathbb{R}\}$ e $CD = \{(2+s, 3-2s, -1+4s);\ s \in \mathbb{R}\}$. Num ponto comum a essas duas retas, deveríamos ter $1 + 2t = 2 + s$, $3-3t = 3-2s$ e $3+t = -1+4s$. Mas estas 3 equações são incompatíveis. Logo

$AB$ e $CD$ não têm pontos em comum. Do mesmo modo, vê-se que nenhum dos pares de retas $AC$ e $BD$, $AD$ e $BC$ tem ponto em comum. Portanto os pontos $A$, $B$, $C$ e $D$ não podem estar no mesmo plano, logo as retas $AB$ e $CD$ também não, isto é, são reversas.

7. Temos um sistema de coordenadas no qual $A = (a, 0, 0)$ e $B = (-a, 0, 0)$. com $a \neq 0$. Então, dado $P = (x, y, z)$, tem-se $d(P, A) = d(P, B) \Leftrightarrow (x-a)^2 + y^2 + z^2 = (x+a)^2 + y^2 + z^2 \Leftrightarrow (x \quad a)^2 = (x+a)^2 \Leftrightarrow 2ax = -2ax \Leftrightarrow 4ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Portanto os pontos eqüidistastes de $A$ e $B$ são aqueles da forma $P = (0, y, z)$, os quais consistem no plano $\Pi_{yz}$.

8. Seja $C$ tal que $B$ é o ponto médio do segmento $AC$. A condição $PB \perp AB$ equivale a dizer que $P$ é eqüidistaste de $A$ e $C$ logo significa que os pontos $P$ que a satisfazem formam, junto com $B$, um plano, a saber, o plano mediador de $AC$.

9. Para simplificar, tomemos um sistema de coordenadas no qual a reta $r$ seja o eixo $OZ$, isto é, $r = \{(0, 0, z);\ z \in \mathbb{R}\}$. A esfera $S$ tem equação $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$, onde $A = (a, b, c)$. Os pontos de $r \cap S$ têm coordenadas obtidas fazendo-se $x = y = 0$ nesta equação, o que dá $a^2+b^2+z^2-2zc+c^2 = R^2$, ou seja, $z^2 - 2cz + (a^2 + b^2 + c^2 - R^2) = 0$. As raízes desta equação, em um número de 0, 1 ou 2, dão os pontos de interseção $(0, 0, z)$ de $r$ com $S$. A fim de que $r$ seja tangente a $S$, esta equação deve ter uma só raiz, logo seu discriminaste deve ser zero. Ora temos $\Delta = 4c^2 - 4(a^2+b^2+c^2 \quad R^2)$, de modo que $\Delta = 0$ significa $a^2 + b^2 \quad R^2 = 0$. Nesta condições, a equação quadrática em $z$ reduz-se a $z^2 - 2cz + c^2 = 0$, cuja única raiz é $z = c$. O ponto de tangencia é $P = (0, 0, c)$ e o raio $AP$ é perpendicular ao eixo $OZ$, isto é, à reta $r$, pois os pontos de $AP$ têm a terceira coordenada igual a $c$.

10. (a) Se um dos vetores é zero, eles são sempre ortogonais. Se ambos são não-nulos, fixando um ponto $A$ no espaço existem $B \neq A$ e $C \neq A$ tais que $v = \overrightarrow{AB}$ e $w = \overrightarrow{AC}$. Então $v$ e $w$ são ortogonais quando os segmentos $AB = AC$ são perpendiculares.

    (b) Diz-se que o vetor $v$ é ortogonal à reta $r$ quando, para qualquer pontos $A, B \in r$, os vetores $v$ e $\overrightarrow{AB}$ são ortogonais.

    (c) Analogamente, o vetor $v$ é ortogonal ao plano $\Pi$ quando, para quaisquer pontos $A, B \in \Pi$, $v$ é ortogonal ao vetor $\overrightarrow{AB}$.

11. Primeiro deixemos explicito o significado de $\lambda \cdot v$. Seja $v = \overrightarrow{AB}$. Se $\lambda = 0$, então $\lambda \cdot v = 0$. Se $\lambda > 0$ então $\lambda \cdot v = \overrightarrow{AE}$ onde $E$ pertence à reta $AB$, $B$ e $E$ estão do mesmo lado em relação a $A$ e $d(E, A) = \lambda \cdot d(B, A)$. Se $\lambda < 0$, $\lambda \cdot v = \overrightarrow{AF}$, onde $F$ pertence à reta $AB$, A está entre $B$ e $F$, e $d(F, A) = -\lambda \cdot d(B, A)$. Portanto, o vetor $w = \overrightarrow{CD}$ é da forma $\lambda \cdot v$ para algum $\lambda$ se, e somente se, o segmento de reta orientado $CD$ é equivalente a $AE$ ou a $AF$, logo $AB$ e $CD$ são paralelos ou colineares.

12. Sejam $u = \overrightarrow{AB} = (2, -3, 1)$ e $v = \overrightarrow{CD} = (1, -2, 4)$. As retas $r'$ e $s$, que se cortam no ponto $C$, formam dois ângulos suplementares, $\theta$ e $\pi - \theta$. O maior deles é o obtuso, que portanto tem cosseno negativo. Temos $\langle u, v\rangle = 2 \cdot 1 + (-3)(-2) + 1 \cdot 4 = 12$, $|u| = \sqrt{14}$ e $|v| = \sqrt{21}$. Sabemos que $\langle u, v\rangle = |u| \cdot |v| \cdot \cos\theta$, logo $\cos\theta = \langle u, v\rangle / |u| \cdot |v|$. Portanto $\cos\theta = 12/7\sqrt{6}$. Assim, o ângulo, entre os vetores $u$ e $v$ é agudo e daí o maior ângulo entre as retas $r'$ e $s$ mede $\pi - \theta$ radianos e seu cosseno é igual a $-12/7\sqrt{6}$. Olhando a calculadora, vemos que esse ângulo mede $134°24'36''$.

13. A verificação de que $\langle u, v\rangle = \langle u, w\rangle = 0$ é uma conta imediata. Observamos que as projeções dos vetores $v$ e $w$ sobre o plano $\Pi_{xy}$ são os vetores $v_{xy} = (\alpha, \beta)$ e $w_{xy} = (\alpha', \beta')$ e que a primeira coordenada de $u$ é, em valor absoluto, a área do paralelogramo cujos lados são $v_{xy}$ e $w_{xy}$. Observação análoga vale para as demais coordenadas de $u$. Portanto tem-se $u = 0$ se, e somente se, as projeções de $v$ e $w$ sobre cada um dos planos $\Pi_{xy}$, $\Pi_{xz}$ e $\Pi_{yz}$ são colineares, ou seja, $v$ e $w$ são colineares.

14. Dado $u = (a, b, c)$, com $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, e tomando $v = (-bt, at, 0)$, $w = (act, bct, -1/t)$, é imediato que $\langle u, v\rangle = 0$ e $\langle u, w\rangle = 0$ seja qual for $t$. Por outro lado, temos $\langle u, w\rangle = a^2ct + b^2ct - c/t$. Lembrando $a^2 + b^2 = 1 - c^2$, a fim de que seja $\langle u, w\rangle = 0$, devemos ter a então $(1 - c^2)ct = c/t$. Admitindo $abc \neq 0$, ou seja, $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$, tem-se também $c^2 \neq 1$, logo podemos concluir que, para ser $\langle u, w\rangle = 0$, deve-se tomar $t^2 = 1/(1 - c^2)$. Com essa escolha (essa escolhas, na verdade) de $t$ valem também $|v|^2 = (a^2 + b^2)t^2 - (1 - c^2)t^2 = 1$ e $|w|^2 = a^2c^2t^2 + b^2c^2t^2 + 1/t^2 = (1 - c^2)c^2t^2 + 1/t^2 = 1$. Examinando o argumento, vê-se que bastaria admitir que $c \neq 0$ e que uma das coordenadas $a$ ou $b$ também fosse $\neq 0$. Sem esta hipótese, o vetor $u$ seria igual a $\pm e_1$, $\pm e_2$ ou $\pm e_3$. Neste caso, não haveria dificuldade em achar $v$ e $w$ mas a solução proposta não serviria.

15. Se $P = A + sv + tw$ então $\overrightarrow{AP} = sv + tw$, logo $\langle \overrightarrow{AP}, u\rangle = s\langle v, u\rangle + t\langle w, u\rangle = 0$. Reciprocamente, se $\langle \overrightarrow{AP}, u\rangle = 0$ então, tomando $B \neq A$ tal que $u = \overrightarrow{AB}$, vemos que $AB$ e $AP$ são segmentos perpendiculares, portanto $P$ pertence ao plano $\Pi$ que passa por $A$ e é perpendicular a $AB$. (V. Exercício 8.) Como $v$ e $w$ são vetores não-colineares nesse plano, segue-se que $\overrightarrow{AP} = sv + tw$ para determinados números reais $s$, $t$. Assim, o conjunto dos pontos $A + sv + tw$ coincide com o plano que contém $A$ e é perpendicular a $AB$.

16. Os pontos da semi-reta $\overrightarrow{NP}$ diferentes de $N$ são da forma $P' = (tx, ty, 1 - t(1-z))$. Para que $P'$ esteja no ponto $\Pi_{xy}$, deve-se ter $1 - t(1-z) = 0$, ou seja, $t = 1/(1-z)$, o que dá $P' = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0\right)$, portanto $x' = \frac{x}{1-z}$, $y' = \frac{y}{1-z}$. Em seguida, vamos obter a fórmula das coordenadas de $P$ em função das de $P'$. Escrevemos $P' = (a, b, 0)$. Os pontos da semi-reta $\overrightarrow{NP}$ são da forma $P = (ta, tb, 1-t)$. A fim de que $P$ pertença à esfera $S$, deve-se ter $t^2a^2 + t^2b^2 + (1-t)^2 = 1$. Desenvolvendo e simplificando, vem $(a^2 + b^2 + 1)t^2 - 2t = 0$. Como $P \neq N$, t é diferente de zero, portanto $t = 2/(a^2 + b^2 + 1)$. Assim, $P = \left(\frac{2a}{a^2+b^2+1}, \frac{2b}{a^2+b^2+1}, \frac{a^2+b^2-1}{a^2+b^2+1}\right)$.

17. Na equação do plano, podemos multiplicar todos os coeficientes por um fator constante. Se o plano não passa pela origem, sua equação pode, portanto ser escrita sob a forma $mx + ny + pz = 1$. Impondo que as coordenadas dos pontos $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ e $(0, 0, c)$ satisfazem esta equação, obtemos sucessivamente $ma = 1$, $nb = 1$, $pc = 1$, logo $m = 1/a$, $n = 1/b$ e $p = 1/c$ e a equação procurada é $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

18. A fim de que uma reta seja perpendicular a um plano, basta que ela seja ortogonal a dois segmentos de reta não paralelos contidos nesse plano. Seja $P = (x, y, z)$. Temos $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 1)$ e $\overrightarrow{AC} = (-2, 1, -1)$ não-colineares. A fim de que $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ seja ortogonal a $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, deve ser $0 = \langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{AB}\rangle = y + z$ e $0 = \langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{AC}\rangle = -2x + y - z$. O sistema $x + y = 0$, $-2x + y - z = 0$ admite a solução geral $P = (x, x, -x)$. Em particular, $P = (1, 1, -1)$ responde ao que foi pedido. A equação do plano é, portanto $x + y - z = d$. Para determinar $d$, usa-se o fato de que $A = (1, 1, 2)$ pertence a esse plano, o que nos dá $d = 0$. Logo, a resposta é $x + y - z = 0$.

19. A equação procurada tem a forma $mx + ny + pz = q$. Como os pontos $A = (1, 1, 2)$, $B = (1, 2, 3)$ e $C = (-1, 2, 1)$ pertencem ao plano, suas coordenadas

satisfazem a equação. Logo

$$\begin{aligned} m+n+2p &= q \\ m+2n+3p &= q \\ -m+2n+p &= q. \end{aligned}$$

Por escalonamento, este sistema é equivalente a

$$\begin{aligned} m+n+2p &= q \\ n+p &= 0 \\ 0 &= 2q. \end{aligned}$$

Portanto $q=0$ e a solução geral do sistema é $(m,m,-m)$. A equação procurada é $x+y-z=0$.

20. Como as retas $AB$ e $CD$ são paralelas, o ponto $D$ pertence ao plano determinado pelos pontos não-colineares $A$, $B$ e $C$. Este plano contém as duas retas e pode ser determinado pelos processos apresentados nos exercícios 18 e 19.

21. O plano $\Pi$ que se procura contém o ponto $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ e é perpendicular ao segmento $AP$. como $A=(a,b,c)$, a equação do plano $\Pi$ é $(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)+(z_0-c)(z-z_0)=0$.

22. O segmento $OA$ tem comprimento igual à distancia de $O$ ao plano $\Pi$, logo é perpendicular a esse plano. A equação de $\Pi$ é, portanto, da forma $ax+by+cz=d$. Como $A\in\Pi$, temos $d=a^2+b^2+c^2$. Em suma: $ax+by+cz=a^2+b^2+c^2$ é a equação de $\Pi$.

23. Tome um sistema de coordenadas no qual se tenha $A=(0,0,0)$, $B=(1,0,0)$, $C=(0,1,0)$, $D=(0,0,1)$ e $A'=(1,1,1)$.

    a) Temos $\overrightarrow{BC}=(-1,1,0)$, $\overrightarrow{BD}=(-1,0,1)$ e $\overrightarrow{AA'}=(1,1,1)$. Portanto $\langle\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{BC}\rangle=\langle\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{BD}\rangle=0$. Então $AA'$ é ortogonal aos segmentos $BC$ e $BD$ do plano $(BCD)$, logo é perpendicular a esse plano.

    b) O baricentro do triângulo $BCD$ é o ponto $P$, extremidade do vetor $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$. (Lembre que $A$ é a origem do sistema de coordenadas.) Em termos de coordenadas, temos $P=(1/3,1/3,1/3)$, logo $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$.

Assim, $P$ pertence tanto ao plano $(BCD)$ como ao segmento $AA'$, logo é a interseção de $(BCD)$ com $AA'$.

**Nota:** Acima, estamos tomando a aresta do cubo como unidade de comprimento.

24. Tomemos o cubo de aresta 1, contendo os vértices $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,0)$, $D = (0,1,0)$, $E = (0,0,1)$, $C = (1,1,0)$, $F = (1,0,1)$ e mais outros três que não vêm ao caso. Consideremos as diagonais $CE$ e $DF$. Temos $\overrightarrow{CE} = (-1,-1,1)$ e $\overrightarrow{DF} = (1,-1,1)$, portanto $\langle \overrightarrow{CE}, \overrightarrow{DF} \rangle = 1$ e $|\overrightarrow{CE}| = |\overrightarrow{DF}| = \sqrt{3}$, Se chamamos de $\theta$ o ângulo entre esses dois vetores teremos $\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{DF} = |\overrightarrow{CE}| \cdot |\overrightarrow{DF}| \cdot \cos\theta$ portanto $\cos\theta = 1/3$.

25. Os pontos procurados são $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$, $C = (0,0,1)$ e $D = (1,1,1)$. Há duas soluções possíveis.

26. Basta tomar os seis pontos $(\pm 1,0,0)$, $(0,\pm 1,0)$ e $(0,0,\pm 1)$.

27. Tomamos um sistema de coordenadas no qual os vértices do octaedro sejam $A = (a,0,0)$, $A' = (-a,0,0)$, $B = (0,a,0)$, $B' = (0,-a,0)$, $C = (0,0,a)$ e $C' = (0,0,-a)$. Consideremos as faces opostas $ABC$ e $A'B'C'$. Seus baricentros são $P = (a/3, a/3, a/3)$ e $P' - (-a/3, -a/3, -a/3)$. Os vetores $\overrightarrow{AB} = (-a,a,0)$ e $\overrightarrow{AC} = (-a,0,a)$, ambos sobre a face $ABC$, são ortogonais a $\overrightarrow{OP}$. Como $AB$ e $AC$ são não-colineares, segue-se que o segmento $OP$ é perpendicular à face $ABC$. Analogamente, a face $A'B'C'$ é perpendicular a $OP'$, portanto a $OP$. Logo $ABC$ e $A'B'C'$ são paralelas e a distância entre elas é o comprimento da perpendicular comum $PP'$, logo essa distância é $2a/\sqrt{3}$.

28. Seja $A = (3,7,0)$. O vetor $v = (1,2,-1)$ é ortogonal ao plano $\Pi$, dado pela equação $x + 2y - z = 5$, logo a reta $r$, formada pelos pontos $A + tv$, $t \in \mathbb{R}$, é perpendicular a esse plano. A interseção de $r$ com $\Pi$ é o ponto $P = (3 + t, 7 + 2t, -t) = A + tv$ cujas coordenadas satisfazem a equação de $\Pi$, ou seja, $3 + t + 2(7 + 2t) - (-t) = 5$, o que dá $t = -2$, portanto $P = (1,3,2)$. O simétrico do ponto $A$ em relação ao plano $\Pi$ é o ponto $A' = (x,y,z)$ tal que $P$ é o ponto médio de $AA'$. Então deve ser $\frac{x+3}{2} = 1$, $\frac{y+7}{2} = 3$ e $\frac{z+0}{2} = 2$, ou seja, $x = -1$, $y = -1$ e $z = 4$. Assim, o simétrico de $A = (3,7,0)$ em relação ao plano $x + 2y - z = 5$ é o ponto $A' = (-1,-1,4)$.

29. Fixemos um ponto $A$ na reta $r$; por exemplo, $A = (1,0,-1)$. Os pontos de $r$ são da forma $A + tv$, com $v = (1,-1,2)$ e $t \in \mathbb{R}$. A projeção ortogonal de $P$

sobre $r$ é o ponto $Q \in r$ tal que $PQ$ é perpendicular a $r$, ou seja $\langle \overrightarrow{PQ}, v\rangle = 0$. Ora, como $P = (1,2,5)$ e $Q = (t+1, -t, 2t-1)$, temos $\overrightarrow{PQ} = (t, -t-2, 2t-6)$, logo $\langle \overrightarrow{PQ}, v\rangle = t+t+2+4t-12$ e a condição $\langle \overrightarrow{PQ}, v\rangle = 0$ nos dá $t = 5/3$, logo $Q = (8/3, -5/3, 7/3)$.

30. Se $A = (2,1,2)$ então o vetor $\overrightarrow{OA} = (2,1,2)$ é ortogonal ao plano $\Pi$ de equação $x+y+2z = 12$ e a interseção $P$ da reta $OA$ com $\Pi$ é o ponto de $\Pi$ mais próximo de $O$. Como $P \in OA$ suas coordenadas são $(2t, t, 2t)$. E sendo $P \in \Pi$, deve-se ter $2(2t)+t+2(2t) = 12$, o que dá $t = 4/3$. Portanto o ponto do plano $\Pi$ mais próximo de $O$ é $P = (8/3, 4/3, 8/3)$.

31. a) Tome um sistema de coordenadas cuja origem é o pé da altura da pirâmide, os eixos $OX$ e $OY$ são as diagonais da base e (conseqüentemente) o eixo $OZ$ é a altura. As coordenadas dos vértices são, portanto: $A = (3\sqrt{2}, 0, 0)$, $B = (0, 3\sqrt{2}, 0)$, $C = (-3\sqrt{2}, 0, 0)$, $D = (0, -3\sqrt{2}, 0)$ e $E = (0,0,4)$.

b) Cada aresta lateral é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são a altura da pirâmide (que mede 4) e a metade da diagonal da base (igual a $3\sqrt{2}$). Logo a aresta lateral vale $\sqrt{34}$.

c) Temos $\overrightarrow{AE} = (-3\sqrt{2}, 0, 4)$ e $\overrightarrow{BC} = (-3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}, 0)$, logo $\langle \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BC}\rangle = 18$. Além disso, $|\overrightarrow{AE}| = \sqrt{34}$ e $|\overrightarrow{BC}| = 6$. Portanto $18 = \langle \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BC}\rangle = |\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{BC}| \cdot \cos\theta = 6 \cdot \sqrt{34} \cdot \cos\theta$ e daí $\cos\theta = 3/\sqrt{34}$.

d) Por conveniência, escrevemos a equação do plano $(EBC)$ sob a forma $ax + by + cz = 3\sqrt{2}$. Como os pontos $E = (0,0,4)$, $B = (0, 3\sqrt{2}, 0)$ e $C = (-3\sqrt{2}, 0, 0)$ pertencem a esse plano, concluímos que $a = -1$, $b = 1$ e $c = 3/(4\sqrt{2})$, logo a equação do plano $(EBC)$ é $-x+y+\frac{3}{4\sqrt{2}}z = 3\sqrt{2}$. O plano $(EBC)$ é paralelo à reta $AD$ pois contém a reta $BC$, que é paralela a $AD$. Logo, a distância de qualquer ponto de $AD$ ao plano $(EBC)$ é a mesma. Tomemos o ponto $A = (3\sqrt{2}, 0, 0)$. Aplicando diretamente a fórmula da distância de um ponto a um plano, obtemos $d(A, (EBC)) = 24/5$;

32. Há um erro na matriz.

O correto é

Para decodificar $v = (x, y, z)$ sabendo que $Av = w = (64, 107, 29)$ resolvemos o sistema dado por

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 \\ 107 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

A solução é $x = 18$, $y = 14$, $z = 11$ que corresponde à palavra SOL.

33. A equação $x + 2y - 3 + k(3x - y - 2) = 0$ representa um plano vertical contendo a reta $r_k \subset \Pi_{xy}$ que é dada pela mesma equação. Tomando $k = 0$ e $k = 2$, vemos que $r_0$ é a reta $x + 2y = 3$ e $r_2$ é a reta $x = 1$. Temos $r_0 \cap r_2 = \{(1, 1)\}$ e é imediato que os ponto $(1, 1)$ está contido em todas as retas $r_k$. Logo todos os planos representados pelas equação dada, para $k \in \mathbb{R}$ qualquer, contêm a reta vertical $x = y = 1$. A reta $r_k$, cuja equação em $\Pi_{xy}$ é $x + 2y - 3 + k(3x - y - 2) = 0$, passa pelo ponto $(1, 1)$ e tem inclinação $(1 + 3k)/(k - 2)$. (Podemos supor sempre $k \neq 2$ pois já sabemos que $r_2$ é a reta $x = 1$.) Como se vê facilmente, a fração $(1 + 3k)/(k - 2)$, quando $k$ varia em $\mathbb{R} - \{2\}$, assume todos os valores reais salvo 3. Portanto, quando se atribui a $k$ um valor vertical que contenha a reta vertical $x = y = 1$, exceto aquele que contém a reta horizontal dada por $3x - y = 2$, $z = 0$, pois esta é a reta em $\Pi_{xy}$ que passa por $(1, 1)$ com inclinação 3.

34. Para todo $k \in \mathbb{R}$, a equação $x - y + z - 1 + k(2x + y - 3z) = 0$ representa um plano $\Pi_k$, o qual (afirmamos) contém a reta $r$, de equações paramétricas $x = t$, $y = (5t - 3)/2$, $z = (3t - 1)/2$. Com efeito, as equações dos planos $\Pi_1$ e $\Pi_{1/3}$ são $3x - 2z = 1$ e $5x - 2y = 3$, respectivamente. O sistema formado por estas duas equações tem a solução geral $y = (5x - 3)/2$, $z = (3x - 1)/2$. Tomando $x = t$ como parâmetro obtemos a reta $r$, portanto $r$ é a interseção de $\Pi_1$ com $\Pi_{1/3}$. Uma substituição direta mostra que $r$ está contida em todos os planos $\Pi_k$, $k \in \mathbb{R}$. Mostraremos agora que, reciprocamente, todo plano $\Pi$, de equação $ax + by + cz = d$, que contenha a reta $r$, é da forma $\Pi = \Pi_k$ para algum $k$, desde que $\Pi$ não seja o plano $\Pi'$ de equação $2x + y - 3z = 0$. Com efeito, como $r \in \Pi$, o vetor $w = (a, b, c)$ é ortogonal a $r$. Também são ortogonais a $r$ os vetores $u = (1, -1, 1)$ e $v = (2, 1, -3)$ pois os planos $\Pi_0$, de equação $x - y + z = 1$, e $\Pi'$, de equação $2x + y - 3z = 0$, contêm a reta $r$. Segue-se que $w$, $u$ e $v$ são coplanares (como $u$ e $v$ não são colineares) tem-se então $w = \alpha u + \beta v$. Se for

$\alpha \neq 0$ podemos escrever $\frac{1}{\alpha} \cdot w = u + kv$, com $k = \beta/\alpha$ e então o plano $\Pi$, cuja equação pode também ser escrita na forma $\frac{a}{\alpha}x + \frac{b}{\alpha}y + \frac{c}{\alpha}z = \frac{f}{\alpha}$, será igual a $\Pi_k$, com $k = \beta/\alpha$. Ora $\alpha \neq 0$ significa que o plano $\Pi$ não coincide com $\Pi'$. Isto completa a solução.

35. Lembremos que dois ou mais vetores se dizem linearmente dependentes quando um deles é combinação linear dos demais. no plano $\Pi$ que contém os 4 pontos dados, tomemos um sistema de coordenadas no qual $A = (0,0)$. Então as coordenadas dos vetores $u = (b, b')$, $v = (c, c')$ e $w = (d, d')$ são as mesmas dos pontos $B$, $C$ e $D$, nesta ordem. Se os 4 pontos forem colineares, os vetores $u$, $v$ e $w$ serão múltiplos uns dos outros, logo linearmente dependentes. Caso contrário, pelo menos dois desses vetores, digamos $u$ e $v$, serão não-colineares, o que significa que $bc' - cb' \neq 0$. Então o sistema formado pelas equações $bx + cy = d$, $b'x + c'y = d'$ possui uma solução $(x, y)$, e isto quer dizer que $w = xu + yv$, ou seja, os vetores $u$, $v$ e $w$ são linearmente dependentes.

Em seguida, consideremos 4 vetores $v_1$, $v_2$, $v_3$ e $v_4$ no espaço tridimensional. Se três deles, digamos $v_1$, $v_2$, $v_3$ são coplanares então, como vimos acima, um é combinação linear dos outros dois, por exemplo, $v_3 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$. Então $v_3 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + 0 \cdot v_4$ e os 4 vetores dados são linearmente dependentes. Caso contrário, podemos tomar no espaço um sistema de coordenadas no qual $v_1 = (a_1, 0, 0)$, $v_2 = (a_2, b_2, 0)$ e $v_3 = (a_3, b_3, c_3$ com $a_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ e $c_3 \neq 0$. Sejam $v_4 = (d_1, d_2, d_3)$. Podemos resolver (de cima para baixo) o sistema de equações

$$\begin{aligned} a_1 x \qquad\qquad &= d_1 \\ a_2 x + b_2 y \qquad &= d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= d_3 \end{aligned}$$

obtendo assim número $x$, $y$, $z$ tais que $v_4 = xv_1 + yv_2 + zv_3$, logo os vetores dados são linearmente dependentes.

36. Fixando um sistema de coordenadas, consideremos o cubo cujos vértices são $A_1 = (0,0,0)$, $B_1 = (1,0,0)$, $C_1 = (1,1,0)$, $D_1 = (0,1,0)$, $A_2 = (0,0,1)$, $B_2 = (1,0,1)$, $C_2 = (1,1,1)$ e $D_2 = (0,1,1)$. Então $B_1$, $D_1$, $C_2$, $A_2$ são os vértices de um tetraedro regular. Duas arestas opostas deste tetraedro, como $B_1D_1$ e $A_2C_2$, por exemplo, são ortogonais porque são diagonais "diferentes" em faces paralelas do cubo. Mais precisamente, $\overrightarrow{B_1D_1} = (-a, a, 0)$ e $\overrightarrow{A_2C_2} = (a, a, 0)$, logo $\langle \overrightarrow{B_1D_1}, \overrightarrow{A_2C_2} \rangle = 0$.

37. Nos quatro pontos de tangência, os raios da esfera inscrita no tetraedro são ortogonais às suas faces, três das quais estão contidas nos planos coordenados e a quarta, contendo os pontos $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ e $(0,0,3)$, é parte do plano $6x + 3y + 2z = 6$. Como esses raios têm o mesmo comprimento $x$, o centro da esfera é o ponto $P = (x,x,x)$, cuja distância ao plano $6x + 3y + 2z = 6$ é igual a $x$. Pela fórmula da distância de um ponto a um plano, temos $\frac{|6x+3x+2x-6|}{\sqrt{36+9+4}} = x$, ou $11x - 6 = 7x$, o que nos dá $x = 2/3$. Esta é a medida do raio da esfera.

38. Tem-se um ponto $O$ e um plano $\Pi$ tais que, para quaisquer $P$, $Q \in \Pi$, se $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR}$ então $R \in \Pi$. Se $O$ não pertencesse a $\Pi$, seu simétrico $O^*$ em relação a esse plano também não pertenceria. Seja $O' = OO^* \cap \Pi$ o pé da perpendicular baixada de $O$ sobre $\Pi$. Tomando em $\Pi$ dois pontos $P$ e $Q$ tais que $O'$ seja o ponto médio de $PQ$, teríamos $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OO^*}$. Como $O^* \notin \Pi$ chegaríamos a uma contradição. Logo $O \in \Pi$.

39. Como o plano dado não contém a origem, sua equação pode ser escrita sob a forma $mx + ny + pz = 1$. Levando em conta que os pontos $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ e $(0,0,c)$ pertencem ao plano, temos $ma = 1$, $nb = 1$ e $pc = 1$, donde $m = 1/a$, $n = 1/b$ e $p = 1/c$. logo a equação procurada é $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

40. Considere dois pontos distintos $A$, $B$ em $X$. Então a reta $AB$ está contida em $X$. Se $X$ possui algum ponto $C$ fora de $AB$, seja $\Pi$ o plano $(ABC)$. Dado qualquer ponto $P \in \Pi$, se a reta $CP$ não for paralela a $AB$ então $P \in X$ pois, neste caso, $CP$ contém $C$ e o ponto $CP \cap AB$, logo $CP \subset X$. Assim, $X$ contém todos os pontos do plano $\Pi$ salvo eventualmente aqueles que estão na reta $r$ que passa por $C$ e é paralela a $AB$. Mas se $Q$ é um ponto de $r$ então, tomando pontos $M$ e $N$ em lados opostos de $r$, no plano $\Pi$, de modo que $Q \in MN$, concluímos que $Q \in X$. Assim, $X$ contém o plano $\Pi$. Se, além disso, $X$ contiver algum ponto $D$ fora do plano $\Pi$, um raciocínio inteiramente análogo ao anterior mostra que $X$ contém todos os pontos do espaço.

# CAPÍTULO 3

## Sistemas de Equações Lineares

### 3.1 Exercícios

1. Resolva o sistema

$$\begin{aligned} 5732x + 2134y + 2134z &= 7866 \\ 2134x + 5732y + 2134z &= 670 \\ 2134x + 2134y + 5732z &= 11464 \end{aligned}$$

2. Em uma corrida de $d$ metros os atletas $A$, $B$ e $C$ competiram aos pares. $A$ venceu $B$ com 20cm de frente;$B$ venceu $C$ com 10cm de frente e $A$ venceu $C$ com 28cm de frente. Qual é o valor de $d$?

3. Um par de tênis, duas bermudas e três camisetas custam juntos R$ 100,00. Dois pares de tênis, cinco bermudas e 8 camisetas custam juntos R$ 235,00

   Quanto custam juntos um par de tênis, uma bermuda e uma camiseta?

4. Dos pontos $(x, y, z)$ cujas coordenadas satisfazem simultaneamente as equações $x + 2y - z = 2$ e $2x - y + z = 4$, qual deles é o mais próximo do ponto $P = (4, -1, 1)$?

5. Mostre que as soluções do sistema

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$$

são os termos $(x, y, z)$ onde:

$$\begin{aligned} x &= (bc' - cb')t, \\ y &= (ca' - ac')t, \\ z &= (ab' - ba')t. \end{aligned}$$

6. Resolva o sistema:

$$\begin{aligned} x + 3y + 5z + 7w &= 12 \\ 3x + 5y + 7z + w &= 0 \\ 5x + 7y + z + 3w &= 4 \\ 7x + y + 3z + 5w &= 16 \end{aligned}$$

Na sua opinião, a Regra de Cramer é um método prático para resolver este sistema?

7. Determine para que valores de $m$ e $n$ o sistema

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 1 \\ x + 2y - z &= 4 \\ 3x + y + mz &= n \end{aligned}$$

seja:

a) indeterminado

b) impossível.

8. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una função definida por $f(x, y) = (2x + y, x - y)$. Sabe-se que a equação $f(x, y) = \lambda(x, y)$ possui solução $(x, y) \neq (0, 0)$. Calcule $\lambda$.

9. Obtenha as soluções dos seguintes sistemas de equações lineares

a)

$$\begin{aligned} x + z &= 2 \\ y + z &= 4 \\ x + y &= 5 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 2x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + 7x &= 1 \\ x - y + 6z &= 1,5 \\ 2y + 6z &= 2 \\ 4x - 3y + 12z &= 5 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x - 2y + z + t &= 1 \\ 2x + y - 2z + 2t &= 0 \\ x + 6y &= -2 \end{aligned}$$

10. Bronze é uma liga de cobre e zinco, na qual a porcentagem de cobre varia geralmente entre 60% e 70%. Usando dois tipos de bronze, um com 62% e outro com 70% de cobre, deseja-se obter uma tonelada de bronze com exatamente 65% de cobre. Quantos quilos do primeiro tipo de bronze e quantos quilos do segundo devem ser usados?

11. Aço fino é uma liga de ferro, cromo e níquel. Um exemplo é o aço $V2A$, que contém 74% de ferro, 18% de cromo e 8% de níquel. Na tabela abaixo, tem-se ligas I, II, III e IV, as quais devemos misturar para obter uma tonelada de aço $V2A$. Quantos quilos de cada uma dessas ligas devemos tomar?

| | I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|
| Ferro | 70% | 72% | 80% | 85% |
| Cromo | 22% | 20% | 10% | 12% |
| Níquel | 8% | 8% | 10% | 3% |

12. É dado o sistema

$$3x + y - 3z = 1$$
$$mx - 4y + 2z = 3$$
$$5x - 2y - 4z - n$$

e pede-se achar os valores de $m$ e $n$ para os quais os planos definidos por estas equações estejam:

a) na posição da Figura 73

b) na posição da Figura 74

13. Obtenha todas as soluções $x > 0$, $y > 0$ e $z > 0$ do sistema

$$x - 3y + 2z = 3$$
$$2x + y - 3z = 1$$
$$x + 11y - 12z = -7.$$

14. A tabela abaixo exibe as porcentagens de albumina, carbo-hidrato e lipídio em cada um dos alimentos $A$, $B$ e $C$. Mostre que não é possível combinar esse alimentos formando uma refeição que contenha 47% de albumina, 35% de carbo-hidrato e 18% de lipídio. Investigue se seria possível caso as exigências fossem 40% de albumina, 40% de carbo-hidrato e 20% de lipídio.

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| Albumina | 30% | 50% | 20% |
| Carbohidrato | 30% | 30% | 70% |
| lipídio | 40% | 20% | 10% |

15. Mostre que os vetores $v_1$, $v_2$ $v_3$ são linearmente independentes se, e somente se, $v_3$ não é combinação linear de $v_1$ e $v_2$, $v_2$ não é múltiplo de $v_1$ e $v_1$ é $\neq 0$.

16. Dados os pontos $A$, $B$, $C$ e $D$ no espaço, sejam $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{AC}$ e $w = \overrightarrow{AD}$. Prove que os vetores $u$, $v$ e $w$ são linearmente independentes se, e somente se, os quatro pontos dados não são coplanares.

## 3.2 Soluções

1. Escrevendo $a = 5732$ e $b = 2134$, o sistema dado se escreve como

$$ax + by + z = a + b$$
$$bx + ay + bz = 3b - a$$
$$bx + by + az = 2a$$

Então, subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos

$$(a - b)x + (b - c)y = 2(a - b) \text{ e daí (dividindo por } a - b\text{):}$$

$$x - y = 2, \text{ ou seja, } z = x + 1.$$

Substituindo, na terceira equação $y$ por $x - 2$ e $z$ por $x + 1$, vem $bx + bx - 2b + ax + a = 2a$, isto é: $(a + 2b)x = a + 2b$, portanto $x = 1$. Segue-se que $y = -1$ e $z = 2$.

2. Neste problema, admite-se tacitamente que $A$, $B$ e $C$ se deslocam com velocidade uniformes, as quais são mantidas durante as três disputas. Vamos tomar como unitário o tempo que $A$ levou para percorres a distância $d$. Portanto $A$, $B$ e $C$ percorrem, respectivamente, $d$, $d - 20$ e $d - 28$ metros na unidade a distância $d$. Nesse mesmo tempo, $C$ percorre $d(d - 28)/(d - 20)$ metros. Pelos dados do problema, tem-se

$$\frac{d(d-28)}{d-20} = d - 10.$$

Resolvendo esta equação, obtemos facilmente $d = 100$m.

3. Sejam $x$, $y$, $z$ respectivamente os preços de um par de tênis, uma bermuda e uma camiseta. O enunciado nos diz que

$$x + 2y + 3z = 100$$
$$\text{e} \quad 2x + 5y + 8z = 235.$$

Com estes dois dados, as três incógnitas não ficam determinadas. Mas o que se pede é apenas a soma $x + y + z$. Para obtê-la, basta multiplicar la primeira equação por 3 e subtrair a segunda equação do resultado, encontrando $x + y + z = 65$.

**Nota:** Pode-se chegar a esta solução por meio de tentativas ou, de modo mais racional, exprimindo o vetor $w = (1,1,1)$ como combinação linear $w = \alpha u + \beta v$ dos vetores $u = (1,2,3)$ e $v = (2,5,8)$. Em termos de coordenadas, a igualdade $w = \alpha u + \beta v$ significa $\alpha + 2\beta = 1$, $2\alpha + 5\beta = 1$ e $3\alpha + 2\beta = 1$. Resolvendo o sistema formado pelas duas primeiras equações, obtemos $\alpha = 3$ e $\beta = -1$, valores que satisfazem a terceira equação. Logo, devemos multiplicar a primeira equação $x + 2y + 3z = 100$ por 3 e substituir do resultado a segunda equação $2x + 5y + 8z = 235$ para obter $x + y + z = 65$.

4. Os pontos $Q = (x, y, z)$ que satisfazem as equações dadas formam uma reta $r$. Escrevendo as equações dadas como $2y - z = 2 - x$ e $y - z = 2x - 4$, vemos que as soluções deste sistema são $y = -3x + 6$ e $z = -5x + 10$, logo os pontos da referida reta são da forma $Q = (x, -3x + 6, -5x + 10)$, onde o parâmetro $x$ assume todos os valores reais. Tomando $x = 0$ e $x = 1$, obtemos os pontos $Q_0 = (0, 6, 10)$, $Q_1 = (1, 3, 5)$ e o vetor $v = \overrightarrow{Q_0Q_1} = (1, -3, -5)$. Assim $Q = Q_0 + x \cdot v$ é a equação paramétrica de $r$ sob forma vetorial. O ponto $Q$ mais próximo de $P = (4, -1, 1)$ é aquele tal que $\langle v, \overrightarrow{PQ} \rangle = 0$. Ora, $\overrightarrow{PQ} = (x - y, -3x + 2, -5x + 9)$, portanto $\langle v, \overrightarrow{PQ} \rangle = 0$ significa $1(x - y) - 3(-3x + 2) - 5(-5x + 9) = 0$, ou seja, $x = 11/7$. O ponto procurado é portanto,

$$Q = Q_0 + \frac{11}{7} \cdot v = (0, 6, 10) + \frac{11}{7}(1, -3, -5) = (\frac{11}{7}, \frac{9}{7}, \frac{15}{7}).$$

5. O enunciado supõe tacitamente que os planos definidos pelas duas equações não coincidem, isto é, que os vetores $v = (a, b, c)$ e $v' = (a', b', c')$ não são colineares pois neste caso a única solução fornecida pela fórmula sugerida como resposta seria (0,0,0), enquanto as soluções do sistema seriam todos os pontos do plano dado. Dito isto, lembramos o Exercício 13, Capítulo 2, segundo o qual o vetor $w = (bc' - b'c, a'c - c'a, ab' - a'b)$ e (não-nulo e) ortogonal a $v$ e a $v'$, fato que -de resto- se verifica imediatamente. As soluções do sistema proposto formam uma reta que passa pela origem e contém o ponto de coordenadas iguais à de $w$ logo tais soluções são os pontos $P = (x, y, z)$, onde $x = (bc' - b'c)t$, $y = (a'c - ac')t$ e $z = (ab' - a'b)t$, $t \in \mathbb{R}$.

6. Submetemos as linhas da matriz aumentada do sistema a uma seqüencia de

operações elementares, conforme abaixo indicadas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 12 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 3 & 5 & 16 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3L_1 - L_2 \\ \rightarrow \\ 5L_1 - L_3 \\ 7L_1 - L_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 12 \\ 0 & 4 & 8 & 20 & 36 \\ 0 & 8 & 24 & 32 & 56 \\ 0 & 20 & 92 & 44 & 68 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 2L_2 - L_1 \\ \rightarrow \\ 5L_2 - L_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 12 \\ 0 & 4 & 8 & 20 & 36 \\ 0 & 0 & -8 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 8 & 56 & 112 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \rightarrow \\ L_3 + L_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 12 \\ 0 & 4 & 8 & 20 & 36 \\ 0 & 0 & -8 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 64 & 128 \end{bmatrix}$$

Logo o sistema dado é equivalente ao seguinte:

$$\begin{aligned} x + 3y + 5z + 7w &= 12 \\ 4y + 8z + 20w &= 36 \\ -8z + 8w &= 16 \\ 64w &= 128, \end{aligned}$$

o qual, resolvendo de baixo para cima, nos dá: $w = 2$, $z = 0$, $y = -1$, $x = 1$.

A Regra de Cramer, se emprega para resolver este sistema, nos obriga a calcular 5 determinantes de $4 \times 4$, e isto seria, sem duvida, bem mais trabalhoso. Na verdade, calculando esses determinantes pelo desenvolvimento de Laplace, teríamos que somar 120 parcelas, cada uma das quais envolvendo um produto de 4 fatores. Desprezando as adições e subtrações, teríamos que efetuar 360 multiplicações e depois mais 4 divisões.

**Nota:** Determinantes e a Regra de Cramer serão vistos no Capítulo 4.

7. Aplicando operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada, vemos que o sistema dado é equivalente a

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 1 \\ -5y + 5z &= -7 \\ (2m - 6)z &= 2n - 11 \end{aligned}$$

Logo ele é indeterminado quando $m = 3$, $n = 11/2$ e impossível quando $m = 3$ e $n \neq 11/2$.

8. A igualdade $f(x,y) = \lambda \cdot (x,y)$ significa que $2x + y = \lambda \cdot x$ e $x - y = \lambda \cdot y$, ou seja, $(2-\lambda)x + y = 0$ e $x - (1+\lambda)y = 0$. Pelo enunciado, o sistema formado por estas duas equações admite uma solução além da trivial $x = 0$, $y = 0$ Então a matriz

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & -(1+\lambda) \end{bmatrix}$$

tem determinante igual a zero. isto nos dá $\lambda^2 - \lambda - 3 = 0$, e daí $\lambda = (1+\sqrt{13})/2$ ou $\lambda = (1-\sqrt{13})/2$.

9. a) Somando as três primeiras equações obtemos $2x + 2y + 2z = 11$, logo $x + y + z = 11/2$. Como a quarta equação é $x + y + z = 0$, vemos que o sistema é impossível.

   b) Resolvendo por escalonamento o sistema formado pela primeira, segunda e quarta equação, temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

   logo o sistema destas equações escolhidas é equivalente a

$$\begin{aligned} 2x - 2y + 4z &= 1 \\ 2y + 3z &= 0 \\ 3z &= 2. \end{aligned}$$

   o qual, resolvido de baixo para cima, nos dá $z = 2/3$, $y = -1$ e $x = -11/6$. Estes valores de $x$, $y$ e $z$ não satisfazem a terceira nem a quinta das equações dadas, logo o sistema é impossível.

   c) Por conveniência, reescrevemos o sistema dado sob a forma

$$\begin{aligned} y + x - 2y &= 1 - t \\ -2z + 2x + y &= -2t \\ x + 6y &= -2. \end{aligned}$$

O escalonamento nos dá:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1-t \\ -2 & 2 & 1 & -2t \\ 0 & 1 & 6 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1-t \\ 0 & 4 & -3 & 2-4t \\ 0 & 1 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1-t \\ 0 & 4 & -3 & 2-4t \\ 0 & 0 & 27 & 10-4t \end{bmatrix}$$

Assim, o sistema dado é equivalente a

$$\begin{aligned} z + x - 2y &= 1 - t \\ 4x - 3y &= 2 - 4t \\ -27y &= 10 - 4t. \end{aligned}$$

o qual, sendo resolvido de baixo para cima, tem como resultado $y = (4t - 10)/27$, $x = (2 - 8t)/9$, $z = (1 + 5t)/27$. Portanto, atribuindo valores arbitrários a $t$, obtemos todas as soluções $((2 - 8t)/9, (4t \quad 10)/27, (1 + 5t)/27, t)$ do sistema proposto.

10. Tomemos a tonelada ($1t$) como unidade de peso. Dispomos de dois tipos de bronze: $A$ e $B$. Cada tonelada de tipo $A$ contém $0,62t$ de cobre e $0,38t$ de zinco e do tipo $B$ são $0,70t$ de cobre e $0,30t$ de zinco. Se uma tonelada do bronze que desejamos for formada por $x$ toneladas do bronze $A$ e $y$ toneladas do bronze $B$ então ela conterá, no total, $0,62x + 0,70y$ toneladas de cobre e $0,38x + 0,30y$ toneladas de zinco. As condições do problema impõem que

$$\begin{aligned} 0,62x + 0,70y &= 0,65 \\ 0,38x + 0,30y &= 0,35. \end{aligned}$$

Resolvendo este sistema, obtemos $x = 0,625$ e $y = 0,375$. Portanto, a fim do obter uma tonelada de bronze com 65% de cobre e (conseqüentemente) 35% de zinco, devemos tomar 625 quilos do bronze $A$ e 375 quilos do bronze $B$.

11. Em 100 quilos de aço do tipo $V2A$ há 8 quilos de níquel, 18 quilos de cromo e 74 quilos de ferro. Se, na composição deste aço, usamos $x$ quilos do tipo I, $y$

quilos do tipo II, $z$ quilos do tipo III e $t$ quilos do tipo IV então, levando em conta a composição de cada um desses quatro tipos, devemos ter

$$\begin{aligned} 8x + 8y + 10z + 3t &= 8 \\ 22x + 20y + 10x + 12t &= 18 \\ 70x + 72y + 80z + 85t &= 74. \end{aligned}$$

(Cada uma das equações acima representa o número de quilos de níquel, cromo e ferro contidos -nesta ordem- em 100 quilos de aço $V2A$.) Por escalonamento, vemos que este sistema é equivalente a

$$\begin{aligned} 8x + 8y + 10z + 3t &= 8 \\ -8y - 70z + 15t &= -16 \\ -2z + 5t &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo de baixo para cima, obtemos $z = \frac{5}{2}t$, $y = 2 - \frac{45}{4}t$ e $x = \frac{31}{4}t - 1$. Como os valores de $x$, $y$ e $t$ não podem ser negativos, deve-se ter $\frac{4}{31} \leq t \leq \frac{8}{45}$. Para cada valor de $t$ neste intervalo tem-se um modo de misturar os aços de tipos I, II, III, IV de forma a obter $100k$ do aço $V2A$. Esta flexibilidade permite atender as conveniências de preço e estoque. Por exemplo, se não há estoque do tipo I, tomamos $t = 4/31$ e então $x = 0$, $y = 45/31$ e $z = 10/31$. Analogamente, se não dispomos de aço do tipo II, tomamos $t = 8/45$, o que nos dá $y = 0$. Evidentemente, para fabricar uma tonelada (em vez dos cem quilos que estamos considerando) devemos multiplicar $x$, $y$, $z$ e $t$ por 10.

12. É dado o sistema

$$\begin{aligned} 3x + y - 3z &= 1 \\ mx - 4y + 2z &= 3 \\ 5x - 2y - 4z &= n \end{aligned}$$

e pede-se achas os valores de $m$ e $n$ para os quais os planos definidos por estas equações estejam:

a) na posição da Figura 73

b) na posição da Figura 74.

No caso a) a terceira equação deve ser combinação linear das duas primeiras, isto é, deve ser igual à primeira multiplicada por um número $\alpha$, mais a segunda multiplicada por um $\beta$. Então, devemos ter

$$\begin{aligned} 2\alpha + m\beta &= 5 \\ \alpha - 4\beta &= -2 \\ -3\alpha + 2\beta &= -4 \\ \alpha + 3\beta &= n. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema formado pela segunda e terceira equação, obtemos $\alpha = 2$ e $\beta = 1$. Entretanto com estes valores na primeira equação, resulta $m = 1$. A última equação nos dá $n = 5$. Isto responde a). Quando ao ítem b), deve ser $\alpha = 2$, $\beta = 1$, como no caso anterior, e $n \neq \alpha + 3\beta$, ou seja, $n \neq 5$. como era de se esperar.

13. Pedem-se todas as soluções $x > 0$, $y > 0$ e $z > 0$ do sistema

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 3 \\ 2x + y - 3z &= 1 \\ x + 11y - 12z &= -7. \end{aligned}$$

Considerando nas duas primeiras equações apenas $x$ e $y$ como incógnitas, a solução é $x = z + 6/7$, $y = z - 5/7$. Portanto as soluções do sistema formado por estas duas equações são os pontos $(z + 6/7, z - 5/7)$, para valores arbitrários de $z$. Como a terceira equação é uma combinação linear das 2 primeiras (multiplique a primeira por -3, a segunda por 2 e some), os termos $(z + 6/7, z - 5/7, z)$ também são soluções da última equação (o que se pode ver também por substituição direta). Para que as três coordenadas sejam positivas, basta que se tenha $z > 5/7$. Portanto a resposta é: $z > 5/7$, $x = z + 6/7$ e $y = z - 5/7$.

14. 100 gramas da refeição pedida, formadas por $x$ gramas do alimento $A$, $y$ gramas de $B$ e $z$ gramas de $C$ contêm 47 gramas de albumina, 35 gramas de carbohidrato e 18 gramas de lipídio, onde

$$\begin{aligned} 30x + 50y + 20z &= 47 \\ 30x + 30y + 70z &= 35 \\ 40x + 20y + 10z &= 18, \end{aligned}$$

Resolvendo este sistema, encontramos $z = 1/8$, $y = 73/80$ e $x = -3/80$, uma solução negativa, logo a refeição procurada não existe. Se a coluna do segundo membro do sistema fosse (40,40,20), a solução seria $x = 5/40$, $y = 25/40$, $z = 1/4$, e a refeição procurada existiria.

15. As condições apresentadas são evidentemente necessárias. Reciprocamente, supondo-as satisfeitas, suponhamos que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$. Então deve ser $\alpha_2 = 0$ pois se fosse $\alpha_2 \neq 0$ teríamos $v_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} v_1$ e $v_2$ seria múltiplo de $v_1$. Então a relação original se resume a $\alpha_1 v_1 = 0$. Como $v_1 = 0$, isto nos dá $\alpha_1 = 0$. Portanto $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ e $v_1$, $v_2$ $v_3$ são linearmente independentes.

16. Se $A$, $B$, $C$ e $D$ são coplanares então os vetores $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{AC}$ e $w = \overrightarrow{AD}$ são linearmente dependentes, pelo Exercício 35 do Capítulo 2. Reciprocamente, se esses vetores são linearmente dependentes, digamos, com $w = \alpha u + \beta v$ então, pelas definições das operações com vetores, o ponto $D$ (extremidade do vetor $w$) pertence ao plano $ABC$, ou mesmo à reta $ABC$ se esses três pontos forem colineares.

# CAPÍTULO 4

## Matrizes e Determinantes

### 4.1 Exercícios

1. Seja $\boldsymbol{m}$ uma matriz quadrada $n \times n$. Chama-se *traço* de $\boldsymbol{m}$ a soma $\operatorname{tr} \boldsymbol{m} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ dos elementos $a_{ii}$ da sua diagonal. Prove que $\operatorname{tr}(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}) = \operatorname{tr}\boldsymbol{m} + \operatorname{tr}\boldsymbol{n}$, $\operatorname{tr}\alpha\boldsymbol{m} = \alpha \operatorname{tr}\boldsymbol{m}$ se $\alpha \in \mathbb{R}$ e que $\operatorname{tr}(\boldsymbol{mn}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{nm})$.

2. Dadas as matrizes

$$\boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

defina as funções $M, N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (transformações lineares) pondo para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $M(x,y) = (a_1x + b_1y, a_2x + b_2y)$, $N(x,y) = (c_1x + d_1y, c_2x + d_2y)$. Prove que a composta $M \circ N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tema a forma $(M \circ N)(x,y) = (r_1x + s_1y, r_2x + s_2y)$, onde

$$\begin{bmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{mn}.$$

Enuncie e prove um resultado análogo para matrizes $3 \times 3$. Generalize.

3. Sejam $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{p}$ matrizes $3 \times 3$, com $\boldsymbol{p}$ invertível. Prove que $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{p}^{-1}\boldsymbol{m}\boldsymbol{p}$ têm o mesmo traço.

4. No exercício 2, mostre que se $\det \boldsymbol{m} \neq 0$ então a função $M$ transforma todo paralelogramo $P$ (ou paralelepípedo, conforme se considera $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$) noutro paralelogramo (ou paralelepípedo) $P'$ tal que áreas de $P'$ =(áreas de $P$)$\times \det \boldsymbol{m}$, (ou vol$P'$ =vol$P \cdot \det \boldsymbol{m}$).

5. Seja $f$ uma função que faz corresponder a cada par de vetores $v = (a_1, b_1)$, $w = (a_2, b_2)$ em $\mathbb{R}^2$ um número real $f(u, v)$. [Noutras palavras, tem-se uma função $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.] Suponha que $f$ tem as seguintes propriedades para qualquer $v$, $v'$, $w \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

   (a) $f(v, w) = -f(w, v)$;
   (b) $f(v + v', w) = f(v, w) + f(v', w)$;
   (c) $f(\alpha v, w) = \alpha \cdot f(v, w)$;
   (d) se $v = (1, 0)$ e $w = (0, 1)$ então $f(v, w) = 1$.

   Prove que $f(v, w) = a_1 b_2 - a_2 b_1$.

6. Enuncie e demonstre o análogo para $\mathbb{R}^3$ do exercício anterior. Conclua que todas as propriedades do determinante são conseqüências destas quatro.

7. Dada a matriz

$$\boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

   mostre que $\boldsymbol{m}^2 = \boldsymbol{I}_2$. Ache números $\alpha$, $\beta$ tais que a matriz $\boldsymbol{p} = \alpha \boldsymbol{m} + \beta \boldsymbol{I}_2$ cumpra $\boldsymbol{p}^2 = \boldsymbol{p}$ e seja não-nula. A partir daí, encontre uma matriz não-nula $\boldsymbol{q}$ tal que $\boldsymbol{p}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}\boldsymbol{p} = 0$. Escreva $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{q}$ explicitamente.

8. Seja

$$\boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

   tal que $\Delta = \det \boldsymbol{m} \neq 0$. Resolva os sistemas de equações lineares

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + b_1 x_2 &= 1 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} a_1 y_1 + b_1 y_2 &= 0 \\ a_2 y_1 + b_2 y_2 &= 1 \end{aligned}$$

e obtenha uma fórmula explicita para a matriz inversa

$$m^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$$

9. Partindo da matriz

$$m = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix},$$

e supondo $\Delta = \det m \neq 0$, use três vezes a regra de Cramer para mostrar que

$$m^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \\ N_1 & N_2 & N_3 \\ P_1 & P_2 & P_3 \end{bmatrix}$$

onde $M_1 = (-1)^{i+1}A_i$, $N_i = (-1)^i B_i$ e $P_i = (-1)^{i+1}C_i$ $(i = 1, 2, 3)$. [Conforme a notação estabelecida na seção 3, os número $A_i$, $B_i$ e $C_i$ são os menores relativos a $a_1$, $b_i$ e $c_i$ respectivamente.] A matriz $\Delta \cdot m^{-1}$ chama-se a *adjunta clássica* de $m$.

10. Escreva um sistema de 3 equações lineares com 3 incógnitas. Resolva-o por eliminação, pela regra de Cramer e pela fórmula $x = m^{-1} \cdot d$. Compare e comprove qual dos três métodos é o mais eficiente.

11. Uma matriz quadrada $m$ chama-se *ortogonal* quando $m^T = m^{-1}$. Prove que $m$ é ortogonal se, e somente se, seus vetores-linha (ou colunas) são dois a dois ortogonais de comprimento 1. Dê exemplos de matrizes ortogonais $2 \times 2$ e $3 \times 3$ nas quais nenhum elemento é igual a zero. (Veja Exercício 14, Capítulo 2.)

12. Seja $m$ uma matriz $3 \times 3$ ou $3 \times 4$. Diz-se que $m$ tem *posto* 1 quando uma de suas linhas é não-nula e as outras são múltiplos dela. Prove que, neste caso, uma de suas colunas é não nula e as outras colunas são múltiplos dela.

13. Prove que uma matriz $m$, do tipo $3 \times 3$, tem posto 1 se, e somente se, existem números $a_1$, $a_2$, $a_3$ e $b_1$, $b_2$, $b_3$ tais que

$$m = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix}.$$

Enuncie e demonstre um fato análogo para matrizes $3 \times 4$.

14. Seja $m$ uma matriz $3 \times 3$. Diz-se que $m$ tem *posto* 2 quando duas de suas linhas são linearmente independentes e a outra é combinação linear delas. Prove que se $m$ tem posto 2 então duas de suas colunas são linearmente independentes e a outra coluna é combinação linear delas. Enuncie e demonstre um resultado análogo para matrizes $3 \times 4$.

15. Diz-se que uma matriz $3 \times 3$ tem *posto* 3 quando suas linhas são linearmente independentes. Prove que se $m$ tem posto 3 então suas três colunas são linearmente independentes.

16. Diz-se que uma matriz $3 \times 4$ tem *posto* 3 quando suas linhas são linearmente independentes. Prove que, neste caso, três de suas colunas são linearmente independentes e a quarta necessariamente uma combinação linear delas.

17. Prove o Teorema de Rouché: um sistema de 3 equações lineares com três incógnitas tem solução se, e somente se, o posto da matriz do sistema é igual ao posto da matriz aumentada. [Note que o posto de uma matriz não-nula é o número máximo de linhas -ou colunas- linearmente independentes dessa matriz.]

18. Este exercício é longo porem fácil e bastante instrutivo. Dados os vetores $u = (a_1, b_1, c_1)$ e $v = (a_2, b_2, c_2)$, chame de *produto vetorial* de $u$ por $v$ ao vetor

$$u \times v = (b_1c_2 - b_2c_1, -(a_1c_2 - a_2c_1), a_1b_2 - a_2b_1).$$

Prove as seguintes propriedades do produto vetorial:

a) $(u + u') \times v = u \times v + u' \times v$,
$(\alpha u) \times v = \alpha(u \times v)$, $\alpha \in \mathbb{R}$; e
$u \times v = -v \times u$.

b) Para todo vetor $w = (a_3, b_3, c_3)$, se indicamos com $\det[u, v, w]$ o determinante da matriz cujas linhas são $u$, $v$, $w$, desenvolvendo-o segundo a terceira linha vê-se que:

$$\langle u \times v.w\rangle = \det[u, v, w].$$

c) $u \times v$ é ortogonal a $u$ e a $v$.

d) $u \times v = 0$ se, e somente se, os vetores $u$ e $v$ são colineares.

e) $|u \times v|^2 = \det[u, v, u \times v] = \text{vol}[u, v, u \times v] = |u \times v|$, áreas$[u, v]$, onde vol$[u, v, u \times v]$ é o volume do paralelepípedo $S$ que tem os vetores $u$, $v$, $u \times v$ por arestas, como no texto. Analogamente, área$[u, v]$ é a área do paralelogramo construído com os vetores $u$, $v$ por lados.

f) $|u \times v| = \text{área}[u, v] = \sqrt{|u|^2|v|^2 - \langle u, v\rangle^2}$.

g) $(b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (a_1c_2 - a_2c_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) - (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)^2$ para quaisquer $a_1$, $b_1$, $c_1$, $a_2$, $b_2$ e $c_2$ (identidade de Lagrange).

h) Dado um paralelogramo no espaço, o quadrado de sua áreas é igual à soma dos quadrados das áreas de suas três projeções ortogonais sobre os planos $\Pi_{xy}$, $\Pi_{yz}$ e $\Pi_{xz}$.

19. Sejam $\boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Resolva dois sistemas $2 \times 2$ para obter uma matriz $\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}$ tal que $\boldsymbol{mp} = \boldsymbol{I}_2$.

20. Sejam $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{p}$ matrizes $3 \times 3$. Se uma das linhas de $\boldsymbol{m}$ é múltiplo de outra, prove que o mesmo ocorre com a matriz produto $\boldsymbol{mp}$. Conclua que $\boldsymbol{m}$ não possui uma matriz inversa.

21. Torne mais abrangente o resultado acima: mostre que se alguma linha de $\boldsymbol{m}$ é combinação linear das outras então o mesmo ocorre com $\boldsymbol{mp}$, seja qual for $\boldsymbol{p}$. Conclua que, nesta condições, $\boldsymbol{m}$ não é invertível.

22. determine quais das matrizes abaixo têm uma linha que é combinação linear das outras duas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 8 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

23. Sejam $OA$, $OB$ e $OC$ segmentos de reta perpendiculares dois a dois. Use a matriz de Gram para mostrar que

$$(\text{área } OAB)^2 + (\text{área } OBC)^2 + (\text{área } OCA)^2 = (\text{área } ABC)^2.$$

24. Sejam $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 4$ e $\overline{AD} = 5$ as medidas de três arestas de um bloco retangular. Determine a áreas do triângulo $BCD$.

25. Calcule área de superfície de um prisma reto cuja base é um paralelogramo $ABCD$, com $\overline{AB} = 6$, $\overline{AC} = 8$, $\overline{BC} = 10$ e três das arestas verticais têm medidas $\overline{AA'} = 2$, $\overline{BB'} = 5$ e $\overline{CC'} = 7$.

26. Dado um triângulo acutângulo $ABC$, mostre que existe um (e somente um) ponto $O$ no espaço, tal que os ângulos $A\hat{O}B$, $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}C$ são retos. Determine as medidas das arestas a da altura da pirâmide de base $ABC$ e vértice $O$ em função dos lados $a$, $b$, $c$ do triângulo $ABC$.

## 4.2 Soluções

1. Sejam $\boldsymbol{m} = [a_{ij}]$ e $\boldsymbol{n} = [b_{ij}]$. Então $\operatorname{tr}(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}) = \operatorname{tr}[a_{ij}+b_{ij}] = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \operatorname{tr}\boldsymbol{m} + \operatorname{tr}\boldsymbol{n}$, $\operatorname{tr}(\alpha\boldsymbol{m}) = \operatorname{tr}[\alpha a_{ij}] = \sum_{i=1}^{n}\alpha a_{ii} = \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \alpha\cdot\operatorname{tr}\boldsymbol{m}$.

   Quando ao traço da matriz produto, observamos que $\boldsymbol{mn} = [c_{ij}]$, onde $c_{ij} = a_{i1}b_{ij} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$, logo $c_{ii} = a_{i1}b_{1i} + a_{i2}b_{2i} + \cdots + a_{in}b_{ni}$ são os elementos da diagonal de $\boldsymbol{mn}$. Assim, o traço de $\boldsymbol{mn}$, soma dos $c_{ii}$, é a soma de todos os produtos da forma $a_{ik}b_{ki}$, onde $i$ e $k$ assumem (independentemente) todos os valores inteiros de 1 a $n$. Analogamente, o traço de $\boldsymbol{nm}$ é a soma de todos os produtos da forma $b_{rs}a_{sr}$, onde $r$ e $s$ variam entre os inteiros de 1 a $n$. Como $b_{rs}a_{sr} = a_{sr}b_{rs}$, segue-se que $\operatorname{tr}(\boldsymbol{mn}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{nm})$.

2. Para todo ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tem-se

$$\begin{aligned}
&(M \circ N)(x,y) = M(N(x,y)) = M(c_1x + d_1y, c_2x + d_2y)\\
&= (a_1(c_1x + d_1y) + b_1(c_2x + d_2y), a_2(c_1x + d_1y) + b_2(c_2x + d_2y))\\
&= ((a_1c_1 + b_1c_2)x + (a_1d_1 + b_1d_2)y, (a_2c_1 + b_2c_2)x + (a_2d_1 + b_2d_2)y)\\
&= (r_1x + s_1y, r_2x + s_2y).
\end{aligned}$$

   O resultado para matrizes de $3 \times 3$, ou mesmo $n \times n$ se verifica do mesmo modo. Se dissemos que $M, N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ são os operadores lineares associados

respectivamente às matrizes $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$, a verificação acima significa que a matriz produto $\boldsymbol{mn}$ foi definida de tal modo que o operador linear a ela associado é $M \circ N$.

3. Como o traço do produto de matrizes não depende dos fatores, temos

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\boldsymbol{p}^{-1}\boldsymbol{m}\boldsymbol{p}) &= \operatorname{tr}((\boldsymbol{p}^{-1}\boldsymbol{m})\boldsymbol{p}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{p}^{-1}\boldsymbol{m})) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^{-1}\boldsymbol{m}) \\ &= \operatorname{tr}(\boldsymbol{I}_3 \cdot \boldsymbol{m}) = \operatorname{tr}\boldsymbol{m}.\end{aligned}$$

4. Seja $X$ o paralelogramo que tem $PA$ e $PB$ como lados, onde $P = (x_0, y_0)$, $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$. A transformação linear $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, associada à matriz $\boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$, leva o paralelogramo $X$ no paralelogramo $X'$, que tem $P'A'$ e $P'B'$ como lados, onde $P' = M(P) = (a_1x_0 + b_1y_0, a_2x_0 + b_2y_0)$, $A' = (a_1x_1 + b_1y_1, a_2x_1 + b_2y_1)$ e $B' = (a_1x_2 + b_1y_2, a_2x_2 + b_2y_2)$. Escrevendo $\alpha_1 = x_1 - x_0$, $\beta_1 = y_1 - y_0$, $\alpha_2 = x_2 - x_0$ e $\beta_2 = y_2 - y_0$, vemos que as áreas dos paralelogramos $X$ e $X'$ são os valores absolutos dos determinantes das matrizes

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{n} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 & a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 \\ a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{mn}$$

respectivamente. Segue-se que

Área $X' = |\det(\boldsymbol{mn})| = |\det \boldsymbol{m}| \cdot |\det \boldsymbol{n}| = |\det \boldsymbol{m}| \cdot$ Área $X$.

Evidentemente, pode ocorrer que se tenha $\det \boldsymbol{m} = 0$. Nesse caso, os lados $P'A'$ e P'B' são colineares e o paralelogramo $X'$ se degenera num segmento de reta. Tudo isto está de acordo com o fato de que, estão, $\det(\boldsymbol{mn}) =$ Área $X' = 0$.

O caso de paralelepípedos em $\mathbb{R}^3$ se trata da mesma maneira.

5. Temos $v = a_1e_1 + b_1e_2$ e $w = a_2e_1 + b_2e_2$. Preliminarmente, observemos que, para qualquer $v \in \mathbb{R}^2$, vale $f(v, v) = 0$ como conseqüência da igualdade $f(v, w) = -f(w, v)$. Portanto

$$\begin{aligned} f(v, w) &= f(a_1e_1 + b_1e_2, w) = a_1 f(e_1, w) + b_1 f(e_2, w) \\ &= a_1 f(e_1, a_2e_1 + b_2e_2) + b_1 f(e_2, a_2e_1 + b_2e_2) \\ &= a_1a_2 f(e_1, e_1) + a_1b_2 f(e_1, e_2) + a_2b_1 f(e_2, e_1) + a_2b_2 f(e_2, e_2) \\ &= (a_1b_2 - a_2b_1) f(e_1, e_2) = a_1b_2 - b_2a_1, \end{aligned}$$

já que $f(e_1, e_1) = f(e_2, e_2) = 0$, $f(e_2, e_1) = -f(e_1, e_2)$ e $f(e_1, e_2) = 1$.

6. O enunciado do análogo para $\mathbb{R}^3$ do exercício anterior é seguinte: Seja $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função que associada a cada terno $(u, v, w)$ de vetores em $\mathbb{R}^3$ o número $f(u, v, w)$ de modo a valerem as condições seguintes, para quaisquer $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

   1. $f(v, u, w) = -f(u, v, w)$ e $f(u, w, v) = -f(u, v, w)$.
   2. $f(u + u', v, w) = f(u, v, w) + f(u', v, w)$.
   3. $f(\alpha u, v, w) = \alpha \cdot f(u, v, w)$.

   De 1. resulta que $f(v, u, w) = -f(w, v, u)$, logo $f(u, v, w)$ muda se sinal quando permutam duas quaisquer de seus variáveis. De 1. resulta ainda que a linearidade de $f$ em relação à primeira variável, expressa pelas condições 2. e 3., vale também para a segunda e para a terceira variáveis. Diz-se então que $f$ é uma função *trilinear*. Exprime-se a condição 1. dizendo que a função trilinear $f$ é *alternada*. Segue-se de 1. que $f(u, u, w) = f(u, v, v) = f(u, v, u) = 0$.

   O enunciado análogo do exercício 5) para $\mathbb{R}^3$ é o seguinte: se $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função trilinear alternada tal que $f(e_1, e_2, e_3) = 1$ então, para $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ quaisquer, o valor $f(u, v, w)$ é o determinante da matriz cujas linhas (ou colunas) são os vetores $u$, $v$, $w$.

   Para provar esta afirmação sejam $u = (a_1, b_1, c_1) = a_1e_1 + b_1e_2 + c_1e_3$, $v = (a_2, b_2, c_2) = a_2e_1 + b_2e_2 + c_2e_3$ e $w = (a_3, b_3, c_3) = a_3e_1 + b_3e_2 + c_3e_3$. A linearidade de $f$ em relação a cada uma de suas variáveis nos dá, sucessivamente:

$$\begin{aligned}
f(u, v, w) &= f(a_1e_1 + b_1e_2 + c_1e_3) \\
&= a_1 \cdot f(e_1, v, w) + b_1 \cdot f(e_2, v, w) + c_1 \cdot f(e_3, v, w), \quad (*) \\
f(e_1, v, w) &= f(e_1, a_2e_1 + b_2e_2 + c_2e_3, w) \\
&= a_2 \cdot f(e_1, e_1, w) + b_2 \cdot f(e_1, e_2, w) + c_1 \cdot f(e_1, e_3, w) \\
&= b_2 \cdot f(e_1, e_2, w) + c_1 \cdot f(e_1, e_3, w), \\
f(e_1, e_2, w) &= f(e_1, e_2, a_3e_1 + b_3e_2 + c_3e_3) \\
&= a_3 \cdot f(e_1, e_2, e_1) + b_3 \cdot f(e_1, e_2, e_2) + c_3 \cdot f(e_1, e_2, e_3) \\
&= c_3.
\end{aligned}$$

   De modo inteiramente análogo se vê que

$$f(e_1, e_3, w) = b_3 \cdot f(e_1, e_3, e_2) = -b_3 \cdot f(e_1, e_2, e_3) = -b_3.$$

Por conseguinte $f(e_1, v, w) = b_2c_3 - b_3c_2$. O mesmo argumento nos dá $f(e_1, v, w) = a_3c_2 - a_2c_3$ e $f(e_3, v, w) = a_2b_3 - a_3b_2$. Pela igualdade (*), tem-se portanto

$$f(u, v, w) = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_3b_1c_2 - a_1b_1c_3 + a - 2b_3c_1 - a_3b_2c_1$$

logo $f(u, v, w)$ é o determinante da matriz $3 \times 3$ cujas linhas são os vetores $u$, $v$ e $w$.

7. A verificação de que $\boldsymbol{m}^2 = \boldsymbol{I}_2$ é imediata. Em seguida observamos que se $\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{m} + \beta\boldsymbol{I}_2$ então $\boldsymbol{p}^2 = \alpha^2\boldsymbol{I}_2 + 2\alpha\beta\boldsymbol{m} + \beta^3\boldsymbol{I}_2 = (\alpha^2 + \beta^2)\boldsymbol{I}_2 + 2\alpha\beta\boldsymbol{m}$. Para termos $\boldsymbol{p}^2 = \boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$, basta tomar $\alpha = \beta = 1/2$, logo $\boldsymbol{p} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{m} + \boldsymbol{I}_2)$. De $\boldsymbol{p}^2 = \boldsymbol{p}$ vem $\boldsymbol{p}^2 - \boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$, ou seja $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{I}_2) = \boldsymbol{0}$. A matriz $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{I}_2$ cumpre $\boldsymbol{pq} = \boldsymbol{qp} = \boldsymbol{0}$. Note-se que, como $\boldsymbol{m} \neq \boldsymbol{I}_2$, tem-se $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{I}_2$ logo $\boldsymbol{q} \neq \boldsymbol{0}$. Além disso, como $\boldsymbol{m} \neq \boldsymbol{I}_2$, tem-se também $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$. Finalmente, no caso proposto, é $\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 4/5 & -2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$.

8. As 4 equações constam dos dois sistemas propostos dizem que $\boldsymbol{mm}^{-1} = \boldsymbol{I}_2$. Resolvendo-os obtemos facilmente $x_1 = \dfrac{b_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$, $x_2 = \dfrac{a_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$, $y_1 = \dfrac{-b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$, $y_2 = \dfrac{a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ e estes são os elementos da matriz inversa $\boldsymbol{m}^{-1}$.

9. Seja $\boldsymbol{m}^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$. A igualdade $\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{m}^{-1} = \boldsymbol{I}_3$ significa que

$$\begin{array}{lll} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = 1 & a_1y_1 + b_1y_2 + c_1y_3 = 0 & a_1z_1 + b_1z_2 + c_1z_3 = 0 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = 0 & a_2y_1 + b_2y_2 + c_2y_3 = 1 & a_2z_1 + b_2z_2 + c_2z_3 = 0 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = 0 & a_3y_1 + b_3y_2 + c_3y_3 = 0 & a_3z_1 + b_3z_2 + c_3z_3 = 1, \end{array}$$

portanto os elementos da matriz inversa $\boldsymbol{m}^{-1}$ são as nove soluções desses três sistemas lineares. Chamemos de $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ e $c = (c_1, c_2, c_3)$ as colunas da matriz $\boldsymbol{m}$. A Regra de Cramer nos dá $x_1 = \det[e_1, b, c]/\Delta$, $x_2 = \det[a, e_1, c]/\Delta$, $x_3 = \det[a, b, e_3]/\Delta$. Ora, é claro que $\det[e_1, b, c] = A_1$, $\det[a, e_2, c] = -B_1$ e $\det[a, b, e_3] = C_1$. Portanto a primeira coluna da matriz $\boldsymbol{m}^{-1}$ é formada por $x_1 = A_1/\Delta$, $x_2 = -B_1/\Delta$ e $x_3 = C_1/\Delta$. As demais colunas são obtidas de modo análogo.

10. Para calcular um determinante $2\times 2$ são necessárias 2 multiplicações e 1 adição. Para um determinante $3 \times 3$, usando Laplace, são 9 multiplicações 5 adições. A Regra de Cramer requer 4 determinantes (36 multiplicações 3 20 adições) e depois mais 3 divisões. Total: 39 multiplicações ou divisões mais 20 adições. (Usando discriminante a definição de determinante $3 \times 3$, o custo de calcular cada um passa para 12 multiplicações e 5 adições.)

    Se usarmos a fórmula dada no exercício anterior, o do cálculo de $\boldsymbol{m}^{-1}$ inclui 9 determinantes $2 \times 2$, 2 determinantes $3 \times 3$ e uma divisão. Total: 98 multiplicações ou divisões e 49 adições. O produto $\boldsymbol{m}^{-1} \cdot \boldsymbol{d}$ envolve 9 multiplicações e 6 adições. Ao todo, a solução $x = \boldsymbol{m}^{-1} \cdot \boldsymbol{d}$ custa 107 multiplicações ou divisões mais 54 adições.

    Finalmente, o processo de eliminação custa 19 multiplicações ou divisões mais 14 adições.

    Estas estimativas deixam claro qual método é preferível sob o ponto de vista computacional. Deve-se enfatizar que a discrepância aumenta assustadoramente para sistemas $n \times n$ à medida que $n$ cresce.

11. Seja $\boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$. Dizer que as linhas de $\boldsymbol{m}$ são vetores ortogonais de comprimento 1 significa afirmar que valem as igualdades $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$, $a_1^2 + b_1^2 = 1$ e $a_2^2 + b_2^2 = 1$. Levando em conta que

$$\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{m}^T = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_1^2 + b_1^2 & a_1a_2 + b_1b_2 \\ a_1a_2 + b_1b_2 & a_2^2 + b_2^2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{m}^T \cdot \boldsymbol{m},$$

    vemos que tais igualdades significam precisamente que $\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{m}^T = \boldsymbol{I}_2$ e que $\boldsymbol{m}^T \cdot \boldsymbol{m} = \boldsymbol{I}_2$, logo $\boldsymbol{m}^{-1} = \boldsymbol{m}^T$. O mesmo se verifica para matrizes $3 \times 3$ ou, em geral, $n \times n$. Também é equivalente dizer que as colunas de $\boldsymbol{m}$ são 2 a 2 ortogonais, de comprimento 1.

12. Seja $\boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha a_1 & \alpha b_1 & \alpha c_1 \\ \beta a_1 & \beta b_1 & \beta c_1 \end{bmatrix}$, com $a_1 \neq 0$. Então, escrevendo $m = b_1/a_1$ e $n = c_1/a_1$, temos que a segunda e a terceira colunas de $\boldsymbol{m}$ são respectivamente iguais a $m$ vezes e a $n$ vezes a primeira.

13. Em primeiro lugar se $\boldsymbol{m} \neq \mathbf{0}$ tem esta forma, digamos com $a_1 b_1 \neq 0$, então, pondo $\alpha = a_2/a_1$ e $\beta = a_3/a_1$, vemos que sua segunda e terceira linhas são respectivamente iguais a $\alpha$ vezes e a $\beta$ vexes a primeira, logo $m$ tem posto 1. Reciprocamente, se $\boldsymbol{m}$ tem posto 1, digamos com $a_1 \neq 0$, então é da forma

$$\boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \alpha a_1 & \alpha a_2 & \alpha a_3 \\ \beta a_1 & \beta a_2 & \beta a_3 \end{bmatrix}$$

Pondo $b_1 = 1$, $b_2 = \alpha$ e $b_3 = \beta$, vemos que $\boldsymbol{m}$ se escreve como

$$\boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_1 & a_3 b_1 \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & a_3 b_2 \\ a_1 b_3 & a_2 b_3 & a_3 b_3 \end{bmatrix}.$$

14. Seja $\boldsymbol{m}$ uma matriz de posto 2 com as duas primeiras linhas linearmente independentes. Então

$$\boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha a_1 + \beta a_2 & \alpha b_1 + \beta b_2 & \alpha c_1 + \beta c_2 \end{bmatrix}$$

Como as duas primeiras linhas são linearmente independentes, podemos supor que $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, logo existem números $x$, $y$ tais que $a_1 x + b_1 y = c_1$ e $a_2 x + b_2 y = c_2$. Segue-se daí que $(\alpha a_1 + \beta a_2)x + (\alpha b_1 + \beta b_2)y = \alpha c_1 + \beta c_2$, portanto a terceira coluna de $\boldsymbol{m}$ é combinação linear das duas primeiras. Além disso, é claro que as duas primeiras colunas de $m$ são linearmente independentes, já que $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$.

15. Seja $\boldsymbol{m}$ uma matriz $3 \times 3$ de posto 3, isto é, suas linhas são linearmente independentes. Em particular, $\boldsymbol{m} \neq \mathbf{0}$. Se uma coluna $v$ de $\boldsymbol{m}$ fosse combinação linear das outras duas então $v$, considerada como linha de $\boldsymbol{m}^T$, seria combinação linear das outras linhas de $\boldsymbol{m}^T$, isto é, das outras colunas de $\boldsymbol{m}$, uma contradição.

16. Se as três linhas de uma matriz $\boldsymbol{m}$ do tipo $3 \times 4$, são linearmente independentes então, com maior razão, desprezando a última coluna de $\boldsymbol{m}$, obtemos uma matriz $\boldsymbol{m}'$, do tipo $3 \times 3$, cujas linhas são também independentes, logo o

mesmo ocorre com suas 3 colunas (que são 3 primeiras colunas de $m$) pelo exercício anterior. A quarta coluna de $m$ pode ser considerada como o segundo membro de um sistema linear $3 \times 3$, que possui (uma única) solução, logo ela é combinação linear das três primeiras.

17. Basta observar que, sendo o posto de uma matriz $3 \times 3$ o número máximo de suas colunas linearmente independentes, ao acrescentar-lhe mais uma coluna esse número se mantém (ou seja, não aumenta) se e somente se, esta coluna acrescentada é combinação linear das outras, ou seja, o sistema possui solução.

18. A afirmação a) resulta de uma verificação, a partir da definição. A prova de b) já está contida em seu próprio enunciado. Quanto a c), basta observar que $\langle u \times v, u\rangle = \det(u, v, u)$, $\langle u \times v, v\rangle = \det(u, v, v)$ e que o determinante de uma matriz que tem duas linhas iguais é zero. Para provar d), notamos inicialmente que a igualdade $u \times (ku) = 0$ é óbvia. reciprocamente, se $u = (a_1, b_1, c_1)$ e $v = (a_2, b_2, c_2)$ são tais que $u \times v = 0$, ou seja, $b_1c_2 - b_2c_1 = a_2c_1 - a_1c_2 = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ então, supondo $u \neq 0$, (pois o caso $u = 0$ é trivial) podemos admitir $a_1 \neq 0$ e então tomamos $v = k \cdot u$ e os vetores $u$, $v$ são portanto colineares. A afirmação e) consiste em três igualdades. A primeira delas é um caso particular de b), com $w = u \times v$. A segunda foi provada no final da seção 5, quando se exprimiu o volume de um paralelepípedo por meio de um determinante e a terceira igualdade é válida porque o volume de um paralelepípedo é o produto de sua altura pela área da base e, como foi visto em c), $|u \times v|$ é a altura. Quanto à f), a primeira igualdade resulta de cancelas o fator $|u \times v|$ na relação $|u \times v|^2 = |u \times v| \cdot$ área$[u, v]$. (note que se $u \times v = 0$, não há o que provar.) A segunda igualdade em f) decorre de ser $(\text{área}[u, v])^2 = \det \begin{vmatrix} \langle u, u\rangle & \langle u, v\rangle \\ \langle u, v\rangle & \langle v, v\rangle \end{vmatrix} = |u|^2|v|^2 - \langle u, v\rangle^2$, como se viu na seção 5. A afirmação g) é meramente a expressão, por meio de coordenadas, da igualdade $|u \times v|^2 = |u|^2|v|^2 - \langle u, v\rangle^2$. Finalmente, h) é uma interessante interpretação geométrica da igualdade $|u \times v|^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, onde $u \times v = (\alpha, \beta, \gamma)$.

19. A igualdade $mp = I_2$, ou seja $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, significa que

$$\begin{cases} y &= 1 \\ 2x + 3y &= 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} w &= 0 \\ 2z + 3w & 1 \end{cases}$$

Resolvendo estes sistemas, obtemos $x = -3/2$, $y = 1$, $z = 1/2$ e $w = 0$. Portanto,

$$p = \begin{bmatrix} -3/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

20. Sejam $m = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha a_2 & \alpha b_2 & \alpha c_2 \end{bmatrix}$ e $p = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$. Então

$$mp = \begin{bmatrix} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 & a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 & a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 & a_2y_1 + b_2y_2 + c_2y_3 & a_2z_1 + b_2z_2 + c_2z_3 \\ \alpha a_2x_1 + \alpha b_2x_2 + \alpha c_2x_3 & \alpha a_2y_1 + \alpha b_2y_2 + \alpha c_2y_3 & \alpha a_2z_1 + \alpha b_2z_2 + \alpha c_2z_3 \end{bmatrix}$$

mostrando assim que a terceira linha de $\boldsymbol{mp}$ é igual á segunda linha vezes $\alpha$. Portanto, não importa qual seja a matriz $\boldsymbol{p}$, o produto $\boldsymbol{mp}$ nunca pode ser igual a $\boldsymbol{I}_3$, ou seja, $\boldsymbol{m}$ não possui inversa.

21. Se, por exemplo, na matriz $\boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ tivemos $a_3 = \alpha a_1 + \beta a_2$, $b_3 = \alpha b_1 + \beta b_2$ e $c_3 = \alpha c_1 + \beta c_2$ então, para qualquer matriz $\boldsymbol{p}$ como na solução de 20), acima, a terceira linha do produto $\boldsymbol{mp}$ será igual a $\alpha$ vezes a primeira mais $\beta$ vezes a segunda. Novamente, daí resulta que $\boldsymbol{mp}$ não pode ser igual a $\boldsymbol{I}_3$ pois a terceira linha de $\boldsymbol{I}_3$ é $(0,0,1)$, a qual não é combinação linear de $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$.

22. Calculando os determinantes, vemos que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = -5, \quad \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 8 \end{bmatrix} = 0,$$

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = -2, \quad \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix} = -32,$$

Portanto apenas a segunda dessas matrizes possui uma linha que é combinação linear dos outras duas. Explicitamente, se escrevemos $(1,8,8) = \alpha(1,3,3) + \beta(2,1,1)$, seremos conduzidos às equações $\alpha + 2\beta = 1$, $3\alpha + \beta = 8$ e $3\alpha + \beta = 8$,

logo $\alpha = 3$ e $\beta = -1$. Assim, a terceira linha da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 8 \end{bmatrix}$ é igual a 3 vezes a primeira menos a segunda.

23. Tome um sistema de coordenadas do qual $O$ é a origem e os pontos $A$, $B$ e $C$ estão sobre os eixos, de modo que $O = (0,0,0)$, $A = (a,0,0)$, $B = (0,b,0)$ e $C = (0,0,c)$. Então área$(OAB) = \frac{ab}{2}$, área$(OAC) = \frac{ac}{2}$ e área$(OBC) = \frac{bc}{2}$, portanto a soma dos quadrados dessas três áreas é igual a $\frac{1}{4}(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$. Por outro lado, $u = \overrightarrow{AB} = (-a,b,0)$ e $v = \overrightarrow{AC} = (-a,0,c)$, portanto $\langle u,u\rangle = a^2 + b^2$, $\langle u,v\rangle = a^2$ e $\langle v,v\rangle = a^2 + c^2$. Então (área $ABC)^2 = \frac{1}{4} \cdot \det \begin{bmatrix} \langle u,u\rangle & \langle u,v\rangle \\ \langle u,v\rangle & \langle v,v\rangle \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \det \begin{bmatrix} a^2+b^2 & a^2 \\ a^2 & a^2+c^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$, ou seja, (área $ABC)^2$ = (área $OAB)^2$ + (área $OAC)^2$ + (área $OBC)^2$. (Nota: o quadrado da área de um triângulo é 1/4 do quadrado da área do paralelogramo no qual dois lados consecutivos são lados desse triângulo.)

24. No exercício anterior sejam $a = 3$, $b = 4$ e $c = 5$. O quadrado da área procurada é $\frac{1}{4}(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = \frac{1}{4}(144 + 225 + 400) = 192,25$. A área é então igual a $\sqrt{192,25} = 13,8654$, aproximadamente.

25. O paralelogramo $ABDC$, base do tronco de prisma reto, é um retângulo pois, como $6^2 + 8^2 = 10^2$, os lados $AB$ e $AC$ formam com a diagonal $BC$ um triângulo retângulo. Tomamos um sistema de coordenadas no qual $A = (0,0,0)$, $B = (6,0,0)$ e $C = (0,8,0)$. Então as extremidades das arestas $AA'$, $BB'$ e $CC'$ são $A' = (0,0,2)$, $B' = (6,0,5)$ e $C' = (0,8,7)$. O quarto vértice da base é $D = (6,8,0)$ e a quarta aresta vertical é $DD'$, onde $D' = (6,8,10)$ pois a face superior do prisma é $A'B'D'C'$, com $\overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{A'C'}$. Sendo $\overrightarrow{A'B'} = (6,0,3)$ e $\overrightarrow{A'C'} = (0,8,5)$, tem-se $\overrightarrow{A'D'} = (6,8,8)$, logo $D' = A' + \overrightarrow{A'D'} = (6,8,10)$. A superfície do tronco de prisma é formada pelos trapézios $BOD'B'$, $OCC'D'$, $ACC'A'$, $AA'B'B$, pelo retângulo $ABDC$ e pelo paralelogramo $A'B'D'C'$. Todos os trapézios têm um ângulo reto, o que torna fácil usar a fórmula "semi-soma das bases vezes a altura". A área do paralelogramo se calcula usando a matriz de Gram dos vetores $u = \overrightarrow{A'C'}$ e $v = \overrightarrow{A'C'}$.

Portanto a área da superfície do tronco de prisma é a soma das seis parcelas seguintes:

área $(ABDC) = 8 \times 6 = 48$, área $(BDD'B') = \frac{5+10}{2} \times 8 = 60$,

área $(DCC'D') = \frac{10+7}{2} \times 6 = 51$, área $(ACC'A') = \frac{2+7}{2} \times 8 = 36$,
área $(AA'B'B) = \frac{2+5}{2} \times 6 = 21$, área $(A'B'D'C') = \sqrt{\det g(u,v)} = 61,48$ pois
$g(u,v) = \begin{bmatrix} \langle u,u\rangle & \langle u,v\rangle \\ \langle u,v\rangle & \langle v,v\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 & 15 \\ 15 & 89 \end{bmatrix}$,
logo $\det g(u,v) = 3780$.

Efetuando a soma das seis parcelas, obtemos a resposta do problema, que é 277,48

26. Para resolver este problema, em vez de partir do triângulo $ABC$ e procurar o ponto $O$, começamos com um sistema de coordenadas com origem $O$ e procuramos sobre os eixos pontos $A' = (x,0,0)$, $B' = (0,y,0)$ e $C' = (0,0,z)$ tais que o triângulo $A'B'C'$ tenha lados $a$, $b$, $c$ iguais aos de $ABC$ portanto seja congruente a ele. Então os números positivos procurados $x$, $y$, $z$ devem ser tais que $x^2 + y^2 = b^2$, $x^2 + y^2 = c^2$ e $y^2 + z^2 = a^2$. este sistema, que se resolve somando as três equações e depois subtraindo sucessivamente o dobro de cada uma delas desta soma, nos dá $x^2 = (b^2 + c^2 - a^2)/2$, $y^2 = (a^2 + c^2 - b^2)/2$ e $z^2 = (a^2 + b^2 - c^2)/2$ e daí obtemos $x$, $y$ e $z$. Note que, como o triângulo $ABC$ é acutângulo, a lei dos cossenos nos assegura que $b^2 + c^2 - a^2$, $a^2 + c^2 - b^2$ e $a^2 + b^2 - c^2$ são números positivos, logo existem suas raízes quadradas $x$, $y$ e $z$.

# CAPÍTULO 5

## Números Complexos

## 5.1 Exercícios

### Seção 2

1. Determine:

   a) $\dfrac{(1+2i)^2}{3+4i}$.

   b) $(1-i)^{12}$.

   c) $i^{-3333}$.

   d) $1+i+i^2+\cdots+i^{1789}$.

2. Determine $a$ real para que $\dfrac{2+ai}{1-i}$ seja: a) real. b) imaginário puro.

3. Determine a áreas do triângulo cujos vértices são as imagens das raízes da equação $z^3+z^2+z=0$.

4. Determine as raízes quadradas de: a) $-5-12i$. b) $i$.

5. Determine os complexos que têm o quadrado igual ao conjugado.

6. Determine o lugar geométrico dos complexos $z$ tais que:

   a) $z \cdot \bar{z} = 1$. b) $z^2$ é imaginário puro. c) $\text{Re}(z) > 1$.

   d) $z = z$. e) $z \cdot \bar{z} + z + \bar{z} = 0$. f) $+\frac{1}{z}$ é real. g) $\text{Re}\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right) = 1$.

7. Determine o lugar geométrico das imagens dos complexos da forma $t + i\sqrt{1-t^2}$.

8. Se $z$ é um complexo não-real, qual é a natureza do quadrilátero cujos vértices são as imagens de $z$, $\bar{z}$, $-z$ e $-\bar{z}$?

9. Resolva o sistema $\begin{cases} (1 \quad i)\bar{z} + i \cdot w = i \\ 2z + (1+i)\bar{w} = 0 \end{cases}$.

10. Determine os complexos $z$ tais que $z + \frac{1}{z} = 1$

11. a) Prove o Teorema de Bramagupta[1] *Se a e b são números naturais e cada um deles é uma soma de dois quadrados perfeitos então ab também é uma soma de dois quadrados perfeitos.*

    b) Escreva $(5^2 + 6^2) \cdot (7^2 + 10^2)$ como uma soma de dois quadrados perfeitos.

12. Determine o polinômio de segundo grau, de coeficientes reais, que admite $1-3i$ como raiz.

13. Determine $a$ real para que a equação $z^2 + (a+1)z + 2 - 3i = 0$ admita uma raiz real.

14. Simplifique: a) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$. b) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$.

15. O polinômio $P(z)$, de coeficientes reais é tal que $P(1-2i) = 2+3i$. Determine o valor de $P(1+2i)$.

16. Uma das raízes da equação $x^4 + bx + c = 0$, $b$ e $c$ reais, é $1+3i$. Determine as outras.

17. Para $n$ inteiro, quantos valores diferentes pode ter a expressão $i^n + i^{-n}$?

18. Calcule $1 + i + i^2 + \cdots + i^n$.

19. Prove que $\text{Re}(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ e $\text{Im}(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2 \cdot i}$.

20. Resolva as equações: a) $z + 2\bar{z} = 6 + i$. b) $(1+i)z + 3i\bar{z} = 2 + i$.

[1]Matemático hindu do século VII.

## Seção 3

1. Determine $(1 - i\sqrt{3})^5$.

2. Determine $\left|\dfrac{1+ai}{1-ai}\right|$, $a$ real.

3. Qual é a relação entre os argumentos de um complexo e de seu simétrico?

4. Qual a relação entre os argumentos de um complexo e de seu conjugado?

5. Calcule $(\sqrt{13} + i)^{-12}$.

6. Se $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, determine o valor de $1 + z + z^2 + \cdots + z^{50}$.

7. Determine os valores inteiros de $n$ para os quais $(1+i)^n = (1-i)^n$.

8. Determine os valores inteiros de $n$ para os quais $(1 - \sqrt{3}i)^n$ é real.

9. Determine os valores inteiros de $n$ para os quais $(-\sqrt{3}+i)^n$ é imaginário puro.

10. Determine as raízes cúbicas de $i$.

11. Determine as raízes quadradas de $-16$.

12. Determine os complexos que têm o cubo igual ao conjugado.

13. Calcule $\left|\sqrt[4]{7 + i\sqrt{15}}\right|$.

14. Determine $a$ real para que um dos argumentos de $a + 3i$ seja igual a $\frac{\pi}{6}$.

15. Determine $z$ sabendo que $|z| = |1 - z| = \left|\frac{1}{z}\right|$.

16. Entre os complexos $z$ tais que $|z + 1 + i| = 1$, determine o de módulo máximo.

17. Se $|z - 2| = 1$, quais os valores máximo e mínimo que $|z + i|$ pode ter?

18. Se $|z| = 3$, qual o maior valor que pode ter $\left|\dfrac{z+i}{z-i}\right|$?

19. Determine o lugar geométrico das imagens dos complexos $z$ tais que:

    a) $|z| = 1$. b) $|z + i| \leq 1$. c) $|z + i| = |1 - z|$. d) $|1 + z| + |1 - z| = 4$.

    e) $|1 + z| + |1 - z| = 2$. f) $|1 + z| = 2|1 - z|$. g) $\dfrac{z-1}{z+1}$ é imaginário puro.

20. Mostre que, para todo complexo $z$, $z \cdot z = |z|^2$.

21. Se $z$ é um complexo, $|1 - z|^2 + |1 + z|^2 =$

a) $1 + |z|^2$. b) $1 + 2|z|^2$. c) $2 + z^2$. d) $2 + 2|z|^2$. e) $2 + 2z^2$.

22. Resolva as equações:

a) $z^2 + 2iz - 5 = 0$.
b) $z^3 + 1 = 0$.
c) $z^2 + z^2 + z + 1 = 0$.
d) $z^5 - z^4 + z^3 - z^2 + z - 1 = 0$.
e) $z^6 + 7x^3 - 8 = 0$.
f) $z^n = (z - 1)^n$, sendo $n > 1$.
g) $(z - 1)^n = (z + 1)^n$, sendo $n > 1$.
h) $z = z^5$.
i) $z^3 = (\bar{z})^{-2}$

23. Se $|z| = 3$ e $|w| = 4$, o que se pode afirmar sobre:

a) $|z + w|$? b) $|z - w|$? c) $|z \cdot w|$? d) $|\frac{z}{w}|$?

24. Sendo $|z| = 3$ e $|w| = 4$, o que se pode afirmar sobre os argumentos de $z$ e $w$ se:

a) $|z + w| = 5$? b) $|z + w| = 7$? c) $|z + w| = 1$? d) $|z + w| = \sqrt{37}$?

25. Que se pode afirmar sobre os argumentos dos complexos não-nulos $z$ e $w$, se:

a) $zw$ é real? b) $\frac{z}{w}$ é real? c) $zw$ é imaginário puro? d) $\frac{z}{w}$ é imaginário puro?

26. Determine o valor de $\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, para o qual $z = \sqrt{3} + i + 2(\cos\theta + i\text{sen}\,\theta)$ tem módulo máximo.

27. Determine $n$ inteiro para que $z = \cos\frac{2\pi}{3} + i\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}$ seja raiz da equação $(1+z)^n = 1 + z^n$.

28. Resolva o sistema $\begin{cases} |z - 2| = |z + 4| \\ |z - 3| + |z + 3| = 10 \end{cases}$

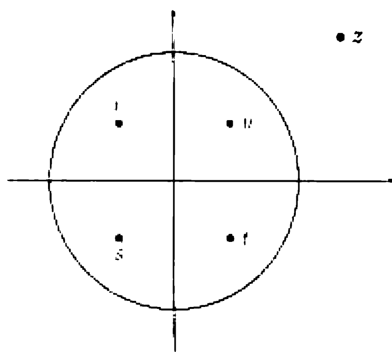
29. Determine o real $q$ para que a equação $z^3 - 5z + q = 0$ admita uma raiz não-real de módulo 2.

30. Os complexos $z$ e $w$ têm como imagens os pontos $A$ e $B$ respectivamente. Se $z = 2w + 5wi$ e $w \neq 0$, quanto vale o cosseno do ângulo $AOB$?

31. O complexo $z = x+yi$ dá uma volta completa sobre a circunferência $x^2+y^2 = 4$, em sentido trigonométrico, partindo de $A(2,0)$. Qual a variação que sofre seu argumento?

32. O complexo $z = x+yi$ dá uma volta completa sobre a circunferência $(x-4)^2 + y^2 = 4$, em sentido trigonométrico, partindo de $A(2,0)$. Qual a variação que sofre seu argumento?

33. A figura mostra, no plano complexo, o circulo de centro na origem e raio 1, e as imagens de cinco números complexos. O complexo $\frac{1}{z}$ é igual a: (a) $z$ (b) $w$ (c) $r$ (d) $s$ (e) $t$




34. Se $0 < \theta < \pi$, determine a forma trigonométrica de:

a) $1 + \cos\theta + i\text{sen}\,\theta$. b) $1 - [\cos\theta + i\text{sen}\,\theta]$;

35. Mostre que o cosseno do ângulo formado pelos vetores que representam os complexos não-nulos $z$ e $w$ é igual a

$$\frac{z\bar{w} + w\bar{z}}{2 \cdot |z| \cdot |w|}.$$

36. Mostre que se as imagens dos complexos $z$, $w$ e $s$ são vértices de um triângulo equilátero então $z^2 + w^2 + s^2 = zw + ws + sz$.

37. As imagens dos complexos $z$ e $w$ são vértices consecutivos de um hexágono regular. Determine o afixo do centro de hexágono.

38. Considere o quadrado definido por $0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1$ e $0 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 1$.

Determine a imagem desse quadrado pelas funções abaixo:

a) $f(z) = 2z$. b) $f(z) = \bar{z}$. c) $f(z) = iz$.
d) $f(z) = i\bar{z}$. e) $f(z) = -z$. f) $f(z) = (1+i)z$.
g) $f(z) = z + 1 - i$. h) $f(z) = 2z + i$. i) $f(z) = (1-i)z + 2 + i$.

39. Considere a circunferência de centro $(1; 2)$ e raio 3. Determine a imagem dessa circunferência pelas funções do exercício 38.

40. Calcule o valor das somas:

a) $S_1 = 1 + \operatorname{sen}\theta + i\operatorname{sen}\theta + \cos\theta + i\operatorname{sen}2\theta + \cdots + \cos n\theta + i\operatorname{sen}n\theta$.

b) $S_2 = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta$

c) $S_3 = 1 + \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}2\theta + \cdots + \operatorname{sen}n\theta$.

## Seção 4

1. Prove que as raízes $n$-ésimas de um complexo não-nulo são obtidas multiplicando-se uma qualquer delas pelas raízes $n$-ésimas da unidade.

2. Prove que a soma das raízes $n$-ésimas da unidade $(n > 1)$ é igual a 0.

3. Prove que a soma das potências de expoente $p$ das raízes $n$-ésimas da unidade $(n > 1)$ é igual a 0 se $p$ é múltiplo de $n$.

4. Na aritmética módulo 12, quais os números que não possuem inverso?

5. Na aritmética módulo $n$, quais os números que não possuem inverso?

6. Na aritmética módulo 13, efetue:

a) $7 + 9$. b) $7 \times 9$. c) $11^{-1}$. d) $3 - 7$. e) $2 + 3$.

7. Considere as raízes de índice 34 da unidade,

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{34} + i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{34}, \quad k = 0, 1, \ldots, 33.$$

Calcule:

a) $\varepsilon_{21} \cdot \varepsilon_{19}$. b) $(\varepsilon_{12})^{13}$. c) $(\varepsilon_{12})^{-11}$. d) $\varepsilon_4 \div \varepsilon_{25}$.

8. Quais das raízes de índice 15 da unidade,

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{15} + i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{15}, \quad k = 0, 1, \ldots, 14.$$

são primitivas?

9. Quantas são as raízes centésimas primitivas da unidade?

10. Prove que é nula a soma dos vetores com origem no centro de um polígono regular convexo e extremidades nos vértices do polígono.

11. Sejam $p$ e $q$ inteiros positivos e seja $d$ o máximo divisor comum de $p$ e $q$. Sejam $A_P = \{z : z^p = 1\}$, $A_q = \{z : z^q = 1\}$ e $A_d = \{z : z^d = 1\}$. Prove que $A_P \cap A_q = A_d$.

12. Prove que uma raiz $n$-ésima da unidade é primitiva se e somente se ela não é raiz da unidade para nenhum $p < n$.

13. Calcule as somas:

a) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n$.
b) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots + (-1)^n C_n^n$.
c) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots$
d) $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots$
e) $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \cdots$
f) $C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \cdots$
g) $C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \cdots$
h) $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 \cdots$

## Seção 5

1. Que pontos são seus próprios inversos?

2. A inversão é uma isometria?

3. Determine ($k = 1$) os intervalos:

   a) do ponto (1,0).

   b) do ponto (2,0).

   c) da reta $y = 2x$.

   d) da reta $x + y = 1$.

   e) da circunferência $x^2 + y^2 = 4$.

   f) da circunferência $x^2 + y^2 = x$.

4. O inverso de uma circunferência $C$ que não contém o centro de inversão e uma circunferência $C'$. O centro $C'$ é o inverso do centro $C$?

5. O inverso de uma circunferência $C$ que não contém o centro de inversão e uma circunferência $C'$. Mostre que o centro de inversão e os centros de $C$ e de $C'$ são colineares. Mostre que $C'$ é homotética de $C$ em relação ao centro de inversão.

6. Mostre que invertendo os lados de um triângulo em relação a seu incentro obtemos três circunferências de mesmo raio.

7. Mostre que invertendo os vértices de um triângulo em relação a seus circuncentro obtemos um triângulo semelhante.

8. As circunferências $ABC$ e $DBC$ cortam-se ortogonalmente. Prove que as circunferências $ADB$ e $ADC$ também cortam-se ortogonalmente.

9. Descreva geometricamente as funções:

   a) $f(z) = \frac{1}{z}$. b) $f(z) = \frac{2z+3}{z+1}$.

10. Determine o inverso do ponto (1,3) sendo (2,1) o centro de inversão e 4 a potência de inversão.

11. Determine o ângulo das circunferências $x^2+y^2+4x+2y = 0$ e $x^2+y^2-2x+6y = 0$.

## 5.2 Soluções

### Seção 2

1. a) $\frac{(1+2i)^2}{3+4i} = \frac{1+4i+4i^2}{3+4i} = \frac{1+4i-4}{3+4i} = \frac{-3+4i}{3+4i} = \frac{-3+4i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{-(3-4i)^3}{9-16i^2} = \frac{-(9-24i+16i^2)}{9+16} = \frac{-9+24i+16}{25} = \frac{7+24i}{25} = \frac{7}{25} + \frac{24}{25}i.$

   b) $(1-i)^{12} = [(1-i)^2]^6 = (1-2i+i^2)^6 = (1-2i-1)^6 = (-2i)^6 = [(-2i)^2]^3 = (4i^2)^3 = (-4)^3 = -64.$

   c) Dividindo 3333 por 4 encontramos quociente 833 e resto 1. Logo $i^{-3333} = i^{-4\times 833-1} = (i^4)^{-833} \cdot i^{-1} = 1^{-833} \cdot i^3 = -i.$

   d) $1 + i + i^2 + \cdots + i^{1789}$

   Cada quatro potências consecutivas somam zero.
   $\underbrace{1+i+i^2+i^3}_{\text{zero}} + \underbrace{i^4+i^5+i^6+i^7}_{\text{zero}} + \cdots + \underbrace{i^{1784}+i^{1785}+i^{1786}+i^{1787}}_{\text{zero}} + i^{1788} + i^{1789} = i^{1788} + i^{1789} = i^0 + i^1 = 1 + i.$

2. a)

$$\frac{2+ai}{1-i} = \frac{(2+ai)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+2i+ai+ai^2}{1-i^2}$$
$$= \frac{2+i(2+a)-a}{1+1} = \frac{2-a}{2} + i \cdot \frac{2+a}{2}$$

   Para que seja real, $\frac{2+a}{2} = 0 \Rightarrow a = -2.$

   b) Para que seja imaginário puro, $\frac{2-a}{2} = 0 \Rightarrow a = 2.$

3. $z^3 + z^2 + z = 0$

   $z(z^2 + z + 1) = 0$

   Uma das raízes é $z_1 = 0$.

   $z^2 + z + 1 = 0$

   $\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$

   $z = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$. Então: $z_2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ e $z_3 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

4. a) $\sqrt{-5-12i} = \sqrt{-5-\sqrt{144i^2}} = \sqrt{-5-\sqrt{-144}}$

   Faça $A = -5$ e $B = -144$

Use o fato de que $\sqrt{A-\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} - \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$.

$$\sqrt{-5-\sqrt{-144}} = \sqrt{\frac{-5+\sqrt{169}}{2}} - \sqrt{\frac{-5-\sqrt{169}}{2}}$$
$$= \pm\left(\sqrt{\frac{13-5}{2}} - \sqrt{\frac{-5-13}{2}}\right)$$
$$= \pm\left(2-\sqrt{-9}\right) = \pm 2 - 3i$$

b)

$$\sqrt{i} = \sqrt{0+\sqrt{-1}}$$
$$= \pm\left(\sqrt{\frac{0+\sqrt{0^2-(-1)}}{2}} + \sqrt{\frac{0-\sqrt{0^2-(-1)}}{2}}\right)$$
$$= \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{-\frac{1}{2}}\right) = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

5. $z^2 = \bar{z}$. Seja $z = a + bi$, com $a$ e $b$ reais. $(a+bi)^2 = (a-bi)$

$a^2 + 2abi + b^2i^2 = a - bi \Rightarrow a^2 - b^2 + 2abi = a - bi \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = a \\ 2ab = -b \end{cases}$

i) se $b \neq 0$, então $2a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

$\frac{1}{4} - b^2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow b^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ii) se $b = 0$, então $a^2 = a \Rightarrow a = 0$ ou $a = 1$.

Resposta: $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1 e 0

6. a) Seja $z = x + iy$, com $x$ e $y$ reais.

$(x+iy)(x-iy) = 1 \Rightarrow x^2 - i^2y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$

circunferência centrada na origem e com raio 1

b) Seja $z = x + iy$, com $x$ e $y$ reais.

$(x+iy)^2 = x^2 + 2yi + i^2y^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ é imaginário puro.

Então $x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x = \pm y$ duas retas concorrentes na origem. Essas retas bissectam os quadrantes

c) Seja $z = x + iy$, com $x$ e $y$ reais.

$\text{Re}(z) > 1 \Rightarrow$ semi-plano $x > 1$

d) Seja $z = x + iy$, com $x$ e $y$ reais.

$x + iy = x - iy \Rightarrow 2iy = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow$ reta real (eixo horizontal no plano de Argand-Gauss)

e) Seja $z = x + iy$, com $x$ e $y$ reais.

$(x+iy)(x-iy)+x+iy+x-iy = 0 \Rightarrow x^2+y^2+2x = 0 \Rightarrow (x+1)^2-1+y^2 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 + y^2 = 1$

circunferência de raio 1 e centro em (-1,0)

f) Seja $z = x + iy$, com $x$ e $y$ reais.

$x + iy + \frac{1}{x+iy} = x + iy + \frac{1(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)} = x + iy + \frac{x-iy}{x^2+y^2} = x + \frac{x}{x^2+y^2} + i\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ e real $\Rightarrow y = \frac{y}{x^2+y^2} = 0 \Rightarrow y = \frac{y}{x^2+y^2}$

i) se y=0, $x$ é qualquer não nulo. $\Rightarrow z$ = real não nulo

ii) se $y \neq 0$, $x^2 + y^2 = 1$

circunferência de raio 1 e centro em (0,0) união com o eixo real, exceto $z = 0$

g) Seja $z = x + iy$, com $x$ e $y$ reais.

$z + 1 = (x + 1) + iy$ e $z - 1 = (x - 1) + iy$

$$\begin{aligned}\frac{(x+1)+iy}{(x-1)+iy} &= \frac{[(x+1)+iy][(x-1)+iy]}{[(x-1)-iy][(x-1)-iy]} \\ &= \frac{x^2-1-y(x+1)i+y(x-1)i+y^2}{(x-1)^2+y^2} \\ &= \frac{(x^2+y^2-1)-yi(x+1-x+1)}{(x-1)^2+y^2}\end{aligned}$$

$\text{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - 1 = x^2 - 2x + y^2 \Rightarrow x = 1$

reta vertical $x = 1$, exceto $z = 1$.

7. $z = t + i\sqrt{1 - t^2} = x + iy$

Então $x = t$ e $y = \sqrt{1 - t^2}$. Observe que $y^2 = 1 - t^2 = 1 - x^2$ e $y \geq 0 \Rightarrow$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \text{e} \\ y \geq 0 \end{cases}$ semi-circunferência de raio 1 e centro na origem

8. Sejam $x$ e $y$ reais.

$z = x + iy$

$\bar{z} = x - iy$

$-z = -x - iy$

$-\bar{z} = -x + iy$

9. $\begin{cases} (1-i)\bar{z} + iw = i \\ 2z + (1+i)\bar{w} = 0 \end{cases}$

Se $2z + (1+i)\bar{w} = 0$, então seu conjugado também é nulo.

Assim $2\bar{z} + (1-i)w = 0$.

Ficamos com

$\begin{cases} (1-i)\bar{z} + iw = i \\ 2\bar{z} + (1-i)w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(1-i)\bar{z} + 2iw = 2i \\ 2(1-i)\bar{z} + (1-i)^2 w = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$2iw - (1+i) \cdot \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow 2z = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \Rightarrow z = -\frac{1}{4} - \frac{i}{4}$

10. $z + \frac{1}{z} = 1$

$z^2 + 1 = z$

$z^2 - z + 1 = 0$

$z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

11. a) $a = p^2 + q^2$
$b = r^2 + s^2$

$$\begin{aligned} ab &= (p^2+q^2)(r^2+s^2) = (p+iq)(p-iq)(r+is)(r-is) \\ &= (pr + ips + iqr + i^2qs)(pr - ips - iqr + i^2qs) \\ &= [(pr - qs) + i(ps+qr)][(pr - qs) - i(ps+qr)] \\ &= (pr-qs)^2 - i^2(ps+qr)^2 = (pr-qs)^2 + (ps+qr)^2 \end{aligned}$$

b) $p = 5 \quad q = 6 \quad r = 7 \quad s = 10$
$(5^2+6^2)(7^2+10^2) = (5 \cdot 7 - 6 \cdot 10)^2 + (5 \cdot 10 + 6 \cdot 7)^2 = 25^2 + 92^2$
Observação: Há outra solução, $95^2 + 8^2$

12. Se os coeficientes são reais, então $1 + 3i$ também é raiz.

    Se o polinômio é de 2º grau, então podemos escrevê-lo como

    $[x - (1+3i)] \cdot [x - (1 - 3i)] = x^2 - (1 - 3i)x - (1+3i)x + (1 - 9i^2) = x^2 - 2x + 10$

    Observação: Há outras soluções, múltiplas reais de $x^2 - 2x + 10$.

13. $z^2 + (a + i)z + 2 - 3i = 0$

    Seja $z = x + 0i$ uma raiz real do polinômio dado.

    $x^2 + (a + i)x + 2 - 3i = (x^2 + ax + 2) + i(x - 3) = 0$

    Então $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ e

    $x^2 + ax + 2 = 0 \Rightarrow 9 + 3a + 2 = 0 \Rightarrow a = -11/3$

14. a)

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2^2-3}}{2}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{2^2-3}}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt{\frac{2-1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

    b)

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{7+\sqrt{48}} = \sqrt{\frac{7+\sqrt{7^2-48}}{2}} + \sqrt{\frac{7-\sqrt{7^2-48}}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{7+1}{2}} + \sqrt{\frac{7-1}{2}} = 2 + \sqrt{3}$$

15. Se $P(z)$ é um polinômio de coeficientes reais, então $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$.

    Assim, se $z = 1 - 2i$, então $P(\bar{z}) = P(1 + 2i) = \overline{2 + 3i} = 2 - 3i$

16. $z_1 = 1 + 3i$ é raiz. Então, como os coeficientes são reais, $z_2 = 1 - 3i$ é raiz. Pela paridade de $x^4 + bx^2 + c$, se $x$ é raiz, $-x$ também é. Logo, $z_2 = -1 + 3i$ e $z_4 = -1 - 3i$.

17. $i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$

    $i^n + i^{-n} = i^n + (i^{-1})^n = i^n + (-i)^n = i^n + (-1)^n \cdot i^n$

    Se $n$ for par, a expressão vale $2i^n$, que pode ser 2 ou $-2$.

Se $n$ por ímpar, a expressão vale zero.

Resposta: três.

18. $1 + i + i^2 + \cdots + i^n = \frac{i^{n+1}-1}{n-1}$ (soma dos termos de uma P.G.)

i) Se $n = 4k$, $k \in \mathbb{Z}$

$i^{n+1} = i$ e a expressão valerá $\frac{i-1}{i-1} = 1$.

ii) Se $n = 4k+1$, $k \in \mathbb{Z}$

$i^{n+1} = -1$ e a expressão valerá

$\frac{-1-1}{i-1} = \frac{-2}{i-1} = \frac{-2(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{2+2i}{1-i^2} = \frac{1(1+i)}{2} = 1 + i$

iii) Se $n = 4k+2$, $k \in \mathbb{Z}$

$i^{n+1} = -i$ e a expressão valerá $\frac{-i-1}{i-1} = \frac{-(i+1)\cdot(-1-i)}{(-1+i)\cdot(-1-i)} = \frac{(i+1)(1+i)}{2} = \frac{2i}{2} = i$

iv) Se $n = 4k+3$, $k \in \mathbb{Z}$

$i^{n+1} = 1$ e a expressão valerá $\frac{1-1}{i-1} = 0$.

20. a) $z + 2\bar{z} = 6 + i$

$(a + bi) + 2 \cdot (a - bi) = 6 + i$

$a + 2a + bi - 2bi = 6 + i$

$a = 2$ e $b = -1$

$z = 2 - i$

b) $(1+i)z + 3i\bar{z} = 2 + i$

$(1+i)(a+bi) + 3i(a-bi) = 2 + i$

$a + bu + ai - b + 3ai + 3b = 2 + 1$

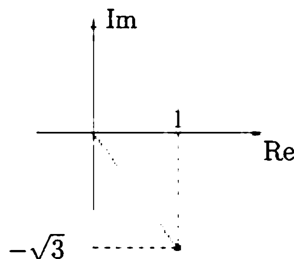
$a + 2b + i(b + 4a) = 2 + i$

$$\begin{cases} a + 2b = 2 \\ 4a + b = 1 \end{cases}$$

$z = 2 - i$

## Seção 3

1. $1 - \sqrt{3} = 2\cos 300° + i\text{sen}\, 300°$ $\quad (1-\sqrt{3})^5 = 2^5 \cdot \cos(5 \times 300°) + i\text{sen}\,(5 \times 300°) = 32 \cdot \cos 1500° + i\text{sen}\, 1500° = 32 \cdot \cos 60° + i\text{sen}\, 60° = 32(\cos 60° + i\text{sen}\, 60°) = 32 \cdot \left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16 + 16\sqrt{3}i$




2. Seja $z = \frac{1+ai}{1-ai} = \frac{(1+ai)(1+ai)}{(1-ai)(1+ai)} = \frac{(1+ai)^2}{1+a^2} = \frac{1+2ai-a^2}{1+a^2} = \frac{1-a^2}{1+a^2} + i\frac{2a}{1+a^2}$

$$|z|^2 = \left[\frac{1-a^2}{1+a^2}\right]^2 + \left[\frac{2a}{1+a^2}\right]^2$$
$$= \frac{1-2a^2+a^4+4a^2}{(1+a^2)^2} = \frac{1+2a^2+a^4}{(1+a^2)^2} = \frac{(1+a^2)^2}{(1+a^2)^2} = 1$$

$$\left|\frac{1+ai}{1-ai}\right| = 1$$

3. Seja $z = x + iy$, com $x$ e $y$ reais.

   Seja $\theta$ o argumento de $z$, de modo que $z = x + iy = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$.

   Seja $w = -x + y$ e $\alpha$ o argumento de $w$. Como $\sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$, então $w = \rho(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$,

   $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\rho}$ e $\cos\theta = \frac{x}{\rho}$

   $\operatorname{sen}\alpha = \frac{-y}{\rho}$ e $\cos\alpha = -\frac{x}{\rho}$

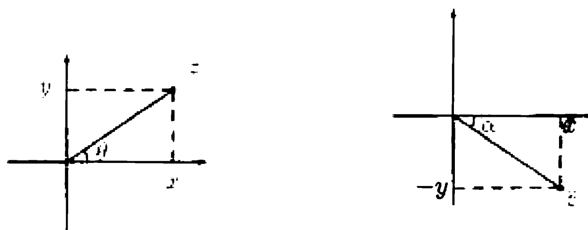
   Então, $\alpha - \theta$ é igual a uma quantidade ímpar de meias voltas.

$$\alpha - \theta = (2k+1)\cdot\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

4. Seja $z = x + iy$, com $x$ e $y$ reais.

   Seja $\theta$ o argumento de $z$, de modo que $z = x + iy = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$.

   Então, $\tan\theta = \frac{y}{x}$




Seja $\alpha$ o argumento do conjunto $\bar{z}$. $\bar{z} = x - iy$. Portanto, $\tan\alpha = \frac{-y}{x} = -\tan\theta = \tan(-\theta) \Rightarrow \alpha = -\theta + 2k\pi$. Então, a soma $\alpha + \theta$ é igual a uma quantidade inteira de voltas $\Rightarrow \alpha + \theta = 2k\pi$.

5. $\sqrt{3} + i = 1 \cdot \cos 30^\circ + i\text{sen}\, 30^\circ$

   $(\sqrt{3} + i)^{-12} = (2\cos 30^\circ + i\text{sen}\, 30^\circ)^{-12} = 2^{-12} \cdot \cos(-12 \times 30^\circ) + i\text{sen}\,(-12 \times 30^\circ) = \frac{1}{4096} \cdot \cos(-360^\circ + i\text{sen}\,(300^\circ)) = \frac{1}{4096} \cdot \cos 0^\circ + i\text{sen}\, 0^\circ = \frac{1}{4096}$

6. $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = \cos 30^\circ + i\text{sen}\, 30^\circ$

   $1 + z + z^2 + \cdots + z^{50} = \frac{z^{51}-1}{z-1}$ (soma dos termos de uma P.G.)

   $z^{51} = 1^{51}\cos(51 \times 30^\circ) + i\text{sen}\,(51 \times 30^\circ) = 1\cos 1530^\circ + i\text{sen}\, 1530^\circ = \cos 90^\circ + i\text{sen}\, 50^\circ$

   $z^{51} - 1 = i - 1$

   $z - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} - 1 = \frac{(\sqrt{3}-2)}{2} + \frac{i}{2}$

   $\frac{z^{51}-1}{z-1} = \frac{i=1}{\frac{\sqrt{3}-2+i}{2}} + \frac{2(i-1)}{\sqrt{3}-2+i} = \frac{(2i-2)(\sqrt{3}-2-i)}{(\sqrt{3}-2)^2+i^2} = \frac{3\sqrt{3}i-4i+2-2\sqrt{3}+4+2i}{3-4\sqrt{3}+4-1} = \frac{(6-2\sqrt{3})+i(2\sqrt{3}-2)}{6-4\sqrt{3}}$
   $\frac{(3-\sqrt{3})+i(\sqrt{3}-i)}{3-2\sqrt{3}}$

7. $1 + i = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + i\text{sen}\,\frac{\pi}{4}$ e $1 - i = \sqrt{2}\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\text{sen}\,(-\frac{\pi}{4})$

   $(\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4})^n + i\text{sen}\,(\frac{\pi}{4})^n = (\sqrt{2}\cos(-\frac{\pi}{4}))^n + i\text{sen}\,(-\frac{\pi}{4}))^n \Rightarrow$

   $(\sqrt{2})\cos\frac{n\pi}{4} + i\text{sen}\,\frac{n\pi}{4} = (\sqrt{2})^n\cos(-\frac{n\pi}{4}) + i\text{sen}\,(-\frac{n\pi}{4}) \Rightarrow$

   $\cos\frac{n\pi}{4} - \cos(-\frac{n\pi}{4} + i\text{sen}\,\frac{n\pi}{4}) \Rightarrow \cos(-\frac{n\pi}{4}) + i\text{sen}\,(-\frac{n\pi}{4}) \Rightarrow$

   $\frac{n\pi}{4} = -\frac{n\pi}{4} + 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$

   Assim $\frac{n}{4} = -\frac{n}{4} + 2k \Rightarrow \frac{n}{2} = 2k \Rightarrow n = 4k,\ k \in \mathbb{Z}$.

8. $1 - \sqrt{3}i = 2\cos 300^\circ + i\text{sen}\, 300^\circ$

   $(1 - \sqrt{3}i)^n = 2^n\cos 300^\circ n + i\text{sen}\, 300^\circ n$

Para que seja real, $300° \cdot n = \frac{5n\pi}{3} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 5n = 3k \Rightarrow n = \frac{3k}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Como $n$ deve ser inteiro, $k$ deve ser múltiplo de 5.

Assim, $k = 5t$, $t \in \mathbb{Z}$ e $n = 3t$, $t \in \mathbb{Z}$

9. $-\sqrt{3} + i = 2\cos 150° + i\text{sen}\, 150°$

$(-\sqrt{3} + i)^n = 2^n \cos 150°n + i\text{sen}\, 150°n$

Para que seja imaginário puro, $150°n = \frac{5\pi}{6}n = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{5n}{6} = \frac{1}{2} + k \Rightarrow n = \frac{3}{5} + \frac{6k}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Como $n$ deve ser inteiro, $k = 5t + 2$, $k \in \mathbb{Z}$.

Assim, $n = \frac{2}{3} + \frac{6}{5}(5t + 2) = \frac{3}{5} + 6t + \frac{12}{5} \Rightarrow n = 6t + 3$, $t \in \mathbb{Z}$

10. $i = 1\cos 90° + i\text{sen}\, 90°$

$1\cos 30° + i\text{sen}\, 30°$

$\downarrow +120°$

$\sqrt[3]{i} = 1\cos 150° + i\text{sen}\, 150°$

$\downarrow +120°$

$1\cos 270° + i\text{sen}\, 270°$

$1\cos 30° + i\text{sen}\, 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

$1\cos 150° + i\text{sen}\, 150° = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

$1\cos 270° + i\text{sen}\, 270° = -i$

Resposta: $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $-i$

11. $-16 = 16[\cos 180° + i\text{sen}\, 180°]$

$2\cos 45° + i\text{sen}\, 45°$

$\downarrow +90°$

$2\cos 135° + i\text{sen}\, 135°$

$\sqrt[4]{16[\cos 180° + i\text{sen}\, 180°]} =$

$\downarrow +90°$

$2\cos 225° + i\text{sen}\, 225°$

$\downarrow +90°$

$2\cos 315° + i\text{sen}\, 315°$

$2\cos 45° + i\text{sen}\, 45° = 2(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

$2\cos 135° + i\text{sen}\, 135° = 2(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

$2\cos 225° + i\text{sen}\, 225° = 2(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

$2\cos 315° + i\text{sen}\, 315° = 2(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

Resposta: $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$, $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

12. $z^3 = \bar{z}$

$z = \rho[\cos\theta + i\text{sen}\,\theta]$

$\bar{z} = \rho(\cos\theta - i\text{sen}\,\theta) = \rho(\cos(-\theta) + i\text{sen}\,(-\theta)) = \rho[\cos(-\theta) + i\text{sen}\,(-\theta)]$

$z^3 = \rho^3[\cos 3\theta + i\text{sen}\, 3\theta]$

$\rho^3[\cos 3\theta + i\text{sen}\, 3\theta] = \rho[\cos(-\theta) + i\text{sen}\,(-\theta)]$

$l^3 = l \Rightarrow \rho = 0$ ou $\rho = 1$

$\rho = 0 \Rightarrow z = 0$

$\rho = 1 \Rightarrow 3\theta = -\theta + 2k\pi \Rightarrow 4\theta = 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

$z_1 = 0$

$z_2 = \cos 0 + i\text{sen}\, 0 = 1$

$z_3 = \cos\frac{\pi}{2} + i\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = i$

$z_4 = \cos\pi + i\text{sen}\,\pi = -1$

$z_5 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\text{sen}\,\frac{3\pi}{2} = -i$

Resposta: $0$, $1$, $i$, $-1$, $-i$

13. Seja $z = 7 + i\sqrt{15}$

$|z|^2 = 49 + 15 = 64 \Rightarrow |z| = 8$

$|\sqrt[3]{z}| = \sqrt[3]{|z|} = 2$

14. $z = a + 3i$, $a \in \mathbb{R}$. Seja $\theta$ o argumento de $z$

$\tan\theta = \frac{3}{a}$

Se $\theta = \frac{\pi}{6}$, então $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3}{a} \Rightarrow a = 3\sqrt{3}$

15. Seja $z = a + bi$, então $1 - z = (1 - a) = (1 - a) - bi$ e

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$|1 - z| = \sqrt{(1 - a)^2 + (-b)^2}$

$|1/z| = \sqrt{\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2+\frac{b^2}{a^2+b^2}}} = \sqrt{\frac{1}{a^2+b^2}}$

$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(1-a)^2+(-b)^2} \Rightarrow a^2 = (1-a)^2$

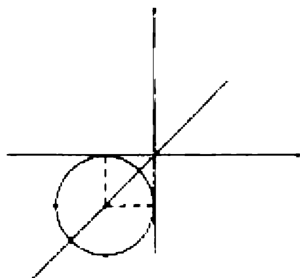
$a = 1-a \Rightarrow a = 1/2$ ou $a = -1+a \Rightarrow$ impossível

$\sqrt{a^2+b^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow a^2+b^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{4}+b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ou $z = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

16. Vamos pensar em $|z+1+i| = |z-(-1-1)| = 1$.

Ou seja, queremos todos os complexos $z$ tais que a sua distância ao número fixo $-1-i$ vale 1.



O conjunto de todos os valores que podemos atribuir a $z$ forma uma circunferência de raio 1 centrada em $-1-i$.

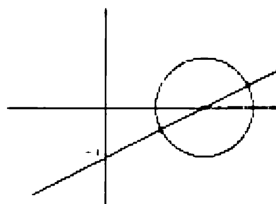
Queremos o de módulo máximo, ou seja, aquele que está mais distante da origem.

Trace uma reta que passa pela origem e pelo centro da circunferência. Essa reta intersecta a circunferência em dois pontos: o mais próximo da origem e o mais distante da mesma. Essa reta é $y = x$, onde $x$ e $y$ são reais.

Assim,

$\sqrt{2(x+1)^2} = 1 \Rightarrow (x+1)\sqrt{2} = 1 \Rightarrow x+1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}-1$ ou $-(x+1)\sqrt{2} = 1 \Rightarrow -x-1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow -x-1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2}-1$ logo o complexo de módulo máximo é $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)+i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)$.

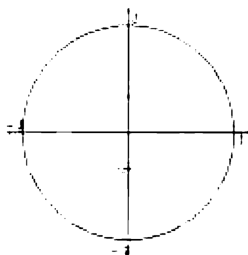
17. Como no problema anterior, $|z-2| = 1$ é uma circunferência de raio 1 centrada em $2 + a$. A seguir, trace a reta que passa pelo centro da circunferência e por $-i$.




Essa reta é $y = \frac{1}{2}x = 1$. Queremos o mínimo e o máximo de $|z - (-i)|$, ou seja, a distância mínima e a distância máxima de $-i$ à circunferência. Como a distância de $-i$ ao centro é $\sqrt{5}$ e o raio é 1, as distâncias procuradas são $\sqrt{5}-1$ e $\sqrt{5}+1$.

18. $\left|\dfrac{z+i}{z-i}\right| = \dfrac{|z+i|}{|z-i|} = \dfrac{\text{distância do complexo ao } -i}{\text{distância do complexo ao } i}$

Além disso, $|z| = 3$, que corresponde a uma circunferência de raio 3 centrada na origem




Devemos procurar o maior numerador com o menor denominados.

Logo, $z = 3i$

Então, o máximo calor de $\left|\frac{z+i}{z-i}\right| = \left|\frac{3i+i}{3i-i}\right| = 2$.

19. a) $|z| = 1 \Leftrightarrow d(z;0) = 1$

circunferência de centro 0 e raio 1

b) $|z+i| \leq 1 \Leftrightarrow d(z;-i) \leq 1$

semicircunferência de centro $-i$, isto é, $(0,-1)$ e raio 1.

c) $|z+i| = |1-z| \Leftrightarrow d(z;-i) = d(z;1)$

mediatriz do segmento de extremos $-i$ e 1.

d) $|1+z| + |1-z| = 4 \Leftrightarrow d(z;-1) + d(1) = 4$

elipse de focos $-1$ e 1 e eixo maior 4,

e) $|1+z| + |1-z| = 2 \Leftrightarrow d(z;-1) + d(z;1) = 2$

segmento de reta (fechado) de extremos $-1$ e 1.

f) se $z = x + yi$ ($x, y$ reais),

$|1+z| = 2|1-z| \Leftrightarrow \sqrt{(1+x)^2 + y^2} = 2\sqrt{(1-x)^2 + y^2} \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 10x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{10}{3}x + y^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - \frac{5}{3})^2 + y^2 = \frac{16}{9}$

circunferência de centro $(\frac{5}{3}, 0)$ e raio $\frac{4}{3}$.

g) Se $z = x + yi$ ($x, y$ reais),

$\frac{z-1}{z+1} = \frac{x-1+yi}{x+1+yi} = \frac{x-1+yi}{x+1+yi}\frac{x+1-yi}{x+1-yi} = \frac{x^2-1+y^2+i[y(x+1)-y(x-1)]}{(x+1)^2+y^2}$

é imaginário puro se e só se $x^2 + y^2 - 1 = 0$ e $(x+1)^2 + y^2 \neq 0$

Circunferência de centro (0,0) e raio 1, exceto o ponto $(-1, 0)$.

20. Seja $z = x + iy$, com $x$ e $y$ reais.

$z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - ixy + ixy - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$.

21. Seja $z = x + iy$, com $x$ e $y$ reais.

$|1-z|^2 + |1+z|^2 = |1-x-iy|^2 + |1+x+iy|^2 = (1-x)^2 + y^2 + (1+x)^2 + y^2 = 1 - 2x + x^2 + y^2 + 1 + 2x + x^2 + y + 2 = 2(1 + x^2 + y^2) = 2(1 + |z|^2) = 2 + 2|z|^2$

Resposta: *D*

22. a) $z^2 + 2iz - 5 = 0$

$\Delta = (2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = -4 + 20 = 16$

$z = \frac{-2i \pm 4}{2}$ ou seja, $z_1 = 2 - i$, $z_2 = -2 - i$

b) $z^3 + 1 = 0$

$z = \sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{\cos 180° + i\text{sen}\, 180°}$

$1 \cos 60° + i\text{sen}\, 60°$

$= 1 \cos 180° + i\text{sen}\, 180°$

$1 \cos 300° + i\text{sen}\, 300°$

$z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_2 = -1$

$z_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

$\frac{z^4-1}{z-1} = 0$

As raízes são as raízes quartas da unidade, à exceção de $z = 1$

Resposta: $-1,\ 1,\ -i,\ i$

d) $z^5 - z^4 + z^3 + z - 1 = 0$

$\frac{z^6-1}{z+1} = 0.$

As raízes são as raízes sextas da unidade, à exceção de $z = -1$

Resposta: $1,\ w\frac{1}{2},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$

$\Delta = 49 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 81$

$z^3 = \frac{-7 \pm 9}{2}$

i) $z^3 = 1 \Rightarrow z = \sqrt[3]{1 \cos 0° + i\text{sen}\, 0°}$

$$= \begin{cases} 1 \cos 0° + i\text{sen}\, 0° \Rightarrow z_1 = 1 \\ 1 \cos 120° + i\text{sen}\, 120° \Rightarrow z_2 = -1/2 + \sqrt{3}i/2 \\ 1 \cos 240° + i\text{sen}\, 240° \Rightarrow z_3 = -1/2 \quad \sqrt{3}i/2 \end{cases}$$

ii) $z^3 = -8 \Rightarrow z = \sqrt[3]{8 \cos 180° + i\text{sen}\, 180°}$

$$= \begin{cases} 1 \cos 60° + i\text{sen}\, 0° \Rightarrow z_4 = 1 + \sqrt{3}i \\ 1 \cos 180° + i\text{sen}\, 180° \Rightarrow z_5 = -2 \\ 1 \cos 300° + i\text{sen}\, 300° \Rightarrow z_3 = 1 - \sqrt{3}i \end{cases}$$

f) $z^n = (z-1)^n,\ n > 1$

$z \neq 0$. Então

$\frac{(z-1)^n}{z^n} = 1 \Rightarrow \left(\frac{z-1}{z}\right) = 1 \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{z}\right) = 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{z} = \sqrt[n]{1} \Rightarrow 1 - \frac{1}{z} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\text{sen}\,\frac{2k\pi}{n} = \frac{1}{z} \Rightarrow z = \frac{1}{\cos\frac{2k\pi}{n} + i\text{sen}\,\frac{2k\pi}{n}} = \frac{1}{\cos\frac{2k\pi}{n} - i\text{sen}\,\frac{2k\pi}{n}}$

como $\cos 2A = \cos^2 A - \text{sen}^2 A = 1 - 2\text{sen}^2 A$ então $\cos\frac{2k\pi}{n} = 1 - 2\text{sen}^2\frac{k\pi}{n}$ e como $\text{sen}\, 2A = 2\text{sen}\, A \cdot \cos A$ então $\text{sen}\,\frac{2k\pi}{n} = 2\text{sen}\,\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}$. Logo

$$z = \frac{1}{2\text{sen}^2\frac{k\pi}{n} - 1i\text{sen}\,\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}} = \frac{1}{2\text{sen}\,\frac{k\pi}{n}} \cdot \frac{1}{\text{sen}\,\frac{k\pi}{n} - i\cos\frac{k\pi}{n}}$$

$$= \frac{\text{sen}\,\frac{k\pi}{n} + i\cos\frac{k\pi}{n}}{2\text{sen}\,\frac{k\pi}{n}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cot\frac{k\pi}{n}, \qquad k = 1, 2, \ldots n-1$$

g) $z \neq 1$, então $1 = \frac{(z+1)^n}{(z-1)^n} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = \left(\frac{z-1+2}{z-1}\right)^n$

$1 + \frac{2}{z-1} = \sqrt[n]{1} \Rightarrow 1 + \frac{2}{z-1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}$, $k = \{1, 2, \ldots n-1\} \Rightarrow z = \dfrac{\cos\frac{2k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n} + 1}{\cos\frac{2k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n} - 1}$

$$z = \frac{(\cos\frac{2k\pi}{n} + 1) + i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}}{(\cos\frac{2k\pi}{n} - 1) + i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}} \cdot \frac{(\cos\frac{2k\pi}{n} - 1) - i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}}{(\cos\frac{2k\pi}{n} - 1) - i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}}$$

$$= \frac{2i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}}{2\cos\frac{2k\pi}{n} - 2} = \frac{i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}}{\cos\frac{2k\pi}{n} - 1} = \frac{i2\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}}{\cos^2\frac{k\pi}{n} - \operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{n} - 1}$$

$$= \frac{i2\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}}{-2\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{n}} = -i\cot\frac{k\pi}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

h) $z = z^5$

$1 = z^4$ com $z = 0$ sendo uma das soluções.

$$z = \sqrt[4]{1\cos 0^\circ + i\operatorname{sen} 0^\circ} = \begin{cases} 1\cos 0^\circ + i\operatorname{sen} 0^\circ \Rightarrow z = 1 \\ 1\cos 90^\circ + i\operatorname{sen} 90^\circ \Rightarrow z = i \\ 1\cos 180^\circ + i\operatorname{sen} 180^\circ \Rightarrow z = -1 \\ 1\cos 270^\circ + i\operatorname{sen} 270^\circ \Rightarrow z = -i \end{cases}$$

Resposta: $0, 1, -1, i, -i$

i) $z^3 = (\bar{z})^{-2}$

Seja $z = \rho\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$. Então $\rho^3\cos 3\theta + i\operatorname{sen} 3\theta = (\rho\cos(-\theta) + i - \operatorname{sen}(-\theta))^{-1} \Rightarrow \rho^3\cos 3\theta + i\operatorname{sen} 3\theta = \rho^{-1}\cos 2\theta + i\operatorname{sen} 2\theta$.

Então

$$\begin{cases} \rho^3 = \rho^{-2} \\ \text{e} \\ 3\pi = 2\pi + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \rho = 1 \\ \text{e} \\ \theta = 3k\pi \end{matrix} \quad \text{Logo, } z = 1\cos 0^\circ + i\operatorname{sen} 0^\circ = 1$$

Resposta: 1

23. a) $|z+w| \leq |z| + |w| = 7$ e $|z+w| \geq ||z| + |w|| = 1$.

Resposta: $1 \leq |z+w| \leq 7$

b) $|z-w| = |z+(-w)| \leq |z| + |-w| = 3 + 4 = 7$ e

$|z-w| = |z+(-w)| \geq ||z| - |-w|| = |3-4| = 1$

Resposta: $1 \leq |z-w| \leq 7$

c) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w| = 12$

Resposta: $|z \cdot w| = 12$

d) $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|} = \frac{3}{4}$

Resposta $|\frac{z}{w}| = \frac{3}{4}$

24. Sejam $\alpha$ o argumento de $z$ e $\beta$ o argumento de $w$. Então $z = 3\cos\alpha + i\text{sen}\,\alpha$ 3 $w = 4\cos\beta + i\text{sen}\,\beta$.

a) $|z+w| = 5$

$z + w = 3\cos\alpha + i\text{sen}\,\alpha + 4\cos\beta + i\text{sen}\,\beta$

$|z+w| = \sqrt{(3\cos\alpha + 4\cos\beta)^2 + (3\text{sen}\,\alpha + 4\text{sen}\,\beta)^2}$

$= \sqrt{9\cos^2\alpha + 24\cos\alpha\ \ \cos\beta + 16\cos^2\beta + 9\text{sen}^2\alpha + 24\text{sen}\,\alpha\cdot\text{sen}\,\beta + 16\text{sen}^2\beta}$

$= \sqrt{25 + 24(\cos\alpha\cdot\cos\beta + \text{sen}\,\alpha\cdot\text{sen}\,\beta)} = 5$

Então, $25 + 24\cos(\alpha-\beta) = 25 \Rightarrow \cos(\alpha-\beta) = 0 \Rightarrow \alpha - \beta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

b) $|z+w| = 7$

Pelo mesmo argumento utilizado em a), $25 + 24\cos(\alpha-\beta) = 49 \Rightarrow \cos(\alpha-\beta) = 1 \Rightarrow \alpha - \beta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

c) $|z+w| = 1$

$25 + 24\cos(\alpha-\beta) = 1 \Rightarrow \cos(\alpha-\beta) = -1 \Rightarrow \alpha - \beta = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

d) $|z+w| = \sqrt{37}$

$25 + 24\cos(\alpha-\beta) = 37 \Rightarrow \cos(\alpha-\beta) = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha - \beta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $\alpha - \beta = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, $\quad k \in \mathbb{Z}$

25. Sejam $z = |z|[\cos\alpha + i\text{sen}\,\alpha]$ e $w = |w|[\cos\beta + i\text{sen}\,\beta]$.

a) $zw = |z|\cdot|w|\cdot[\cos(\alpha+\beta) + i\text{sen}\,(\alpha+\beta)]$

Para que o produto seja real, $\alpha + \beta = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

b) $\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}\cdot[\cos(\alpha-\beta) + i\text{sen}\,(\alpha-\beta)]$

Para que seja real, $\alpha \cdot \beta = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

c) $z \cdot w$ imaginário puro.

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

d) $\frac{z}{w}$ imaginário puro.

$\alpha - \beta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

26. O complexo $z = (\sqrt{3} + i) + 2(\cos\theta + i\text{sen}\,\theta)$ tem módulo máximo quando os vetores que representam os complexos $\sqrt{3} + i$ e $(\cos\theta + i\text{sen}\,\theta)$ estão alinhados, ou seja, têm o mesmo argumento. Como o argumento de $\sqrt{3} + i$ e $\frac{\pi}{6}$, resulta que $\theta$ deve ser igual a $\frac{\pi}{6}$.

27. $\left(1+\cos\frac{2\pi}{3}+i\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)^n = 1+\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)^n$

$\left(1-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 1+\cos\frac{2n\pi}{3}+i\text{sen}\,\frac{2n\pi}{3}$

$\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)^n = 1+\cos\frac{2n\pi}{3}+i\text{sen}\,\frac{2n\pi}{3}$

$\cos\frac{n\pi}{3}+i\text{sen}\,\frac{n\pi}{3} = 1+\cos\frac{2n\pi}{3}+i\text{sen}\,\frac{2n\pi}{3}$

$$\begin{cases}\cos\frac{n\pi}{3} = 1+\cos\frac{2n\pi}{3} & \text{(I)}\\ \text{sen}\,\frac{n\pi}{3} = \text{sen}\,\frac{2n\pi}{3} & \text{(II)}\end{cases}$$

$\cos\frac{n\pi}{3} = 1+\cos\frac{2n\pi}{3} \Rightarrow \cos\frac{n\pi}{3} = 1+2\cos^2\frac{n\pi}{3}-1 \Rightarrow \cos\frac{n\pi}{3}$

$$= 2\cos^2\frac{n\pi}{3}\begin{cases}\cos\frac{n\pi}{3} = 0\\ \text{ou}\\ \cos\frac{n\pi}{3} = \frac{1}{2}\end{cases}$$

$1^{\underline{o}}$) se $\cos\frac{n\pi}{3} = 0$, então $\frac{n\pi}{3} = \frac{\pi}{2}+k\pi \Rightarrow \frac{n}{3}+\frac{1}{2}+k \Rightarrow n = \frac{3}{2}+3k$ com $k$ inteiro. Nesse caso, $n$ não será inteiro. Logo essa solução será descartada.

$2^{\underline{o}}$) se $\cos\frac{n\pi}{3} = \frac{1}{2}$, então $\frac{n\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{3}+2k\pi \Rightarrow \frac{n}{3} = \pm\frac{1}{3}+2k \Rightarrow n = \pm1+6k$ com $k$ inteiro.

$\text{sen}\,\frac{n\pi}{3} = \text{sen}\,2n\frac{\pi}{3} \Rightarrow$

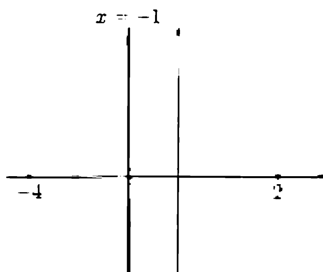
$$\text{sen}\,\frac{n\pi}{3}\cos\frac{n\pi}{3}\begin{cases}\text{sen}\,\frac{n\pi}{3} - 0\\ \text{ou}\\ \cos\frac{n\pi}{3} = \frac{1}{2}\end{cases}$$

$1^{\underline{o}}$) se $\text{sen}\,\frac{n\pi}{3} = 0$, então $\frac{n\pi}{3} = k\pi \Rightarrow n = 3k$ com $k$ inteiro.

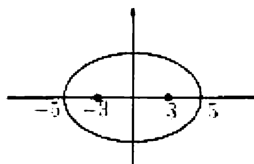
$2^{\underline{o}}$) se $\cos\frac{n\pi}{3} = \frac{1}{2}$, então $n = \pm1+6k$ com $k$ inteiro.

As soluções que satisfazem simultaneamente a (I) e (II) são $n = \pm1+6k$ com $k$ inteiro.

28. $|z-2| = |z+4| \Rightarrow$ lugar geométrico dos números complexos que eqüidistam de 2 e de $-4$, ou seja, a mediatriz do segmento que une (2,0) e $(-4,0) \Rightarrow x = -1$.




$|z-3| + |z+3| = 0 \Rightarrow$ elipse de focos $(3,0)$ e $(-3,0)$ e eixo maior 10.




Resolvendo o sistema,

$x = -1$

$\frac{(-1)^2}{25} + \frac{y^2}{16} - 1 \Rightarrow \frac{y^2}{16} = 1 - \frac{1}{25} \Rightarrow y^2 = \frac{24-25}{[illegible]} \Rightarrow y = \pm\frac{8\sqrt{6}}{5}$

Soluções: $-1 + \frac{8\sqrt{6}}{5}i$; e $-1 - \frac{8\sqrt{6}}{5}i$

29. Como os coeficientes são reais, então, se $z = x + iy$ é raiz, $\bar{z} = x - iy$ também é.

Além disso, $x^2 + y^2 = 4$.

$r_1 = r$

$r_2 = x + iy$

$r_3 = x - iy$

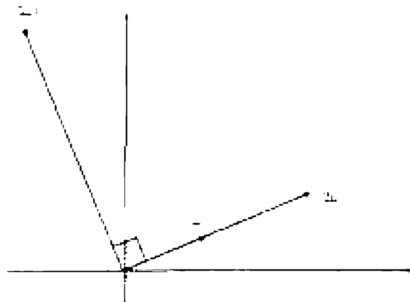
$r_1 + r_2 + r_3 = 0 \Rightarrow r + x + iy + x - iy = 0 \Rightarrow r + 2x = 0 \Rightarrow r = -2x r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = -5 \Rightarrow rx + riy + rx - riy + x^2 + y^2 = -5 \Rightarrow 2rx + 4 = -5 \Rightarrow 2rx = -9$

Então, $2(-x)x = -9 \Rightarrow 4x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3/2$ e $r = \pm 3$

Além disso, $r_1r_2r_3 = r(x^2+y^2) = -q \Rightarrow \begin{cases} -3\cdot 4 = -q \Rightarrow q = 12 \\ 3\cdot 4 = -q \Rightarrow q = -12 \end{cases}$

Solução 12 e $-12$.

30. Se $w$ é um complexo, então $2w$ é seu dobro e $5wi$ é o seu quíntuplo girado de $90°$, no sentido anti-horário.



$AO^2 = 25 \cdot |w|^2 + 4 \cdot |w|^2 = 29 \cdot |w|^2$

$AO = |w| \cdot \sqrt{29}$

$\cos AOB = \frac{2|w|}{|w|\sqrt{29}} = \frac{2\sqrt{29}}{29}$

31. $\left.\begin{array}{lcr} \theta_{\text{final}} & = & 360° \\ \theta_{\text{inicial}} & = & 0° \end{array}\right\}$ variação $= 360°$

32. $\left.\begin{array}{lcr} \theta_{\text{inicial}} & = & 0° \\ \theta_{\text{final}} & = & 0° \end{array}\right\}$ variação $= 0°$

33. Como $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ e $|z| > 1$, o complexo $\frac{1}{z}$ tem módulo menor que 1, sendo portanto, sua imagem interior ao circulo unitário.

Além disso, se $z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$,

$z^{-1} = \frac{1}{|z|}$ (caso $i\operatorname{sen}\theta$), ou seja, os argumentos de $z$ e $\frac{1}{z}$ são simétricos.

Resposta: $t$

34. a) $1 + \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} + i2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2\cos\frac{\theta}{2}[\cos\frac{\theta}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}]$

b) $1 - \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta = 2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} - i2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}[\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} - i\cos\frac{\theta}{2}] = 2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}[\cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}) + i\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2})]$.

35. Seja $z = a + bi$, $a$ e $b$ reais e $w = c + di$, $c$ e $d$ reais.

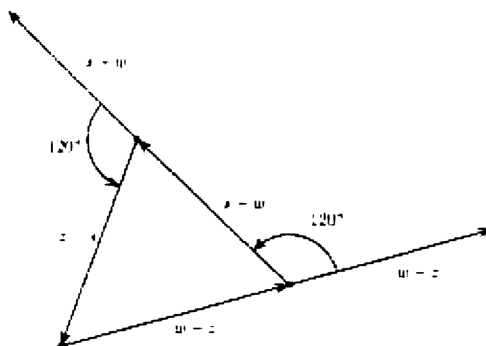
Observe que $z\bar{w} = (a+bi)(c-di) = ac - adi + bci + bd$ e $\bar{z}w = (a-bi)(c+di) = ac - adi + bci + bd$.

Logo, $z\bar{w} + \bar{z}w = 2(ac + bd)$

Se imaginamos $z$ e $w$ como vetores, teremos $\vec{z} = (a, b)$ e $\vec{w} = (c, d)$.

Sabendo que $\vec{z} \cdot \vec{w} = |\vec{z}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos\theta$, então $ac + bd = |z||w|\cos\theta \Rightarrow \frac{z\bar{w}+\bar{z}w}{2} = |z||w|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{z\bar{w}+\bar{z}w}{2|z||w|}$

36. $$\begin{matrix} s - w = (w - z)(\cos 120° + i\,\text{sen}\, 120°) \\ z - s = (s - w)(\cos 120° + i\,\text{sen}\, 120°) \end{matrix} \Rightarrow \frac{s-w}{z-s} = \frac{w-z}{s-w}$$




$s^2 - 2sw + w^2 = zw - z^2 - sw + sz$

$z^2 + s^2 + w^2 = 2w + sw + sz$

37. $(z - p)(\cos \pm 60° + i\,\text{sen} \pm 60°) = w - p$, onde $p$ é o afixo do centro.

Resolvendo,

$$p = \frac{z(\cos \pm 60° + i\,\text{sen} \pm 60°) - w}{\cos \pm 60° + i\,\text{sen} \mp 60° - 1} = \frac{z(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}) - w}{-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

a) $f(z) = 2z$
$f(A) = 0$
$f(B) = 2$
$f(C) = 2 + 2i$
$f(D) = 2i$

b) $f(z) = \bar{z}$
$f(A) = 0$
$f(B) = 1$
$f(C) = 1 - i$
$f(D) = -i$

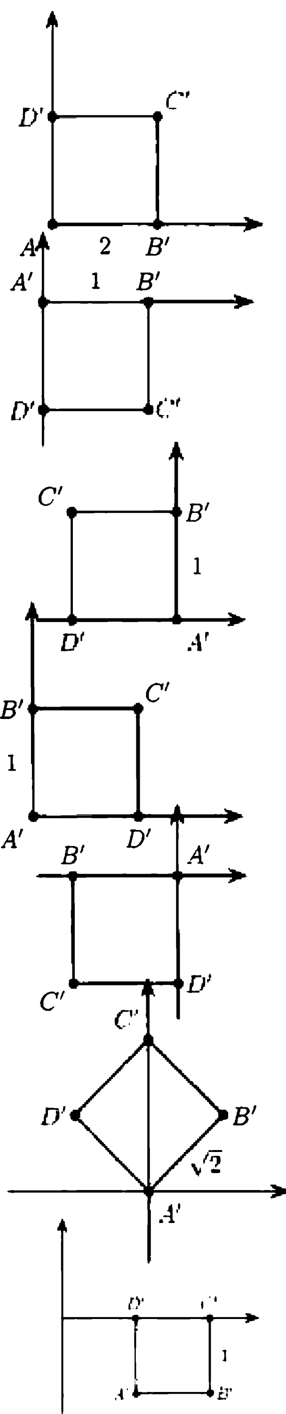
c) $f(z) = iz$
$f(A) = 0$
$f(B) = i$
$f(C) = -1 + i$
$f(D) = -1$

d) $f(z) = i\bar{z}$
$f(A) = 0$
$f(B) = i$
$f(C) = 1 + i$

e) $f(z) = -z$
$f(A) = 0$
$f(B) = -1$
$f(C) = -1 - i$
$f(D) = -i$

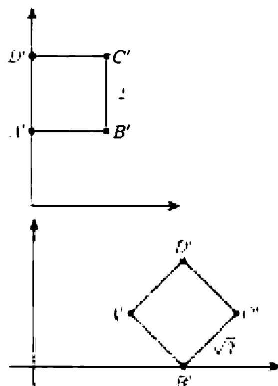
f) $f(z) = (1 + i)z$
$f(A) = 0$
$f(B) = 1 + i$
$f(C) = 2i$
$f(D) = -1 + i$

g) $f(z) = z + 1 - i$
$f(A) = 1 - i$
$f(B) = 2 - i$
$f(C) = 2$
$f(D) = 1$



h)
$$f(z) = 2z + i$$
$$f(A) = i$$
$$f(B) = 2 + i$$
$$f(C) = 2 + 3i$$
$$f(D) = 3i$$

i)
$$f(z) = (1 - i)z + 2 + i$$
$$f(A) = 2 + i$$
$$f(B) = 3$$
$$f(C) = 4 + i$$
$$f(D) = 3 + 2i$$




39. a) $f$ é uma homotetia de razão 2. A imagem é uma circunferência de centro $(2, 4)$ e raio 6.

b) $f$ é uma simetria em relação ao eixo real. A imagem é uma circunferência de centro $(1, -2)$ e raio 3.

c) $f$ é uma rotação de 90° em torno da origem. A imagem é uma circunferência de centro $(-2, 1)$ e raio 3.

d) $f$ é uma simetria em relação ao eixo real seguida de uma rotação de 90° em torno da origem. A imagem é uma circunferência de centro (3,1) e raio 3.

e) $f$ é uma simetria em relação à origem. A imagem é uma circunferência de centro $(-1, -2)$ e raio 3.

f) $f(z) = (1 + i)z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\text{sen}\,\frac{\pi}{4})z$ é uma rotação de $\frac{\pi}{4}$ em torno da origem seguida de uma homotetia de razão $\sqrt{2}$. A imagem é uma circunferência de centro $(1 + i) \cdot (1 + 2i) = -1 + 3i$, ou seja, $(-1, 3)$ e raio $3\sqrt{2}$.

g) $f$ é uma translação. A imagem é uma circunferência de centro $1+2i+1-i = 2 + i$, ou seja, $(2, 1)$ e raio 3.

h) $f$ é uma homotetia de razão 2 seguida de uma translação. A imagem é uma circunferência de centro $2(1 + 2i) + i = 2 + 5i$, isto é, (2,5) e raio 6.

i) $f(z) = (1 - i)z + (2 + i) = \sqrt{2}(\cos\frac{-\pi}{4} + i\text{sen}\,\frac{-\pi}{4})z + 2 + 1$ é uma rotação de $\frac{-\pi}{4}$ em torno da origem, seguida de uma homotetia de razão $\sqrt{2}$, seguida de uma transação. A imagem é uma circunferência de centro $(1 - i)(1 + 2i) + (2 + i) = 5 + 2i$, isto é, (5,2) e raio $3\sqrt{2}$.

40. a) $S_1 = 1 + \cos\theta + i\text{sen}\,\theta + \cos 2\theta + i\text{sen}\,2\theta + \cdots + \cos n\theta + i\text{sen}\,n\theta$.

Esta é a soma dos termos de uma P.G. de termo inicial 1 e razão $(\cos\theta + i\text{sen}\,\theta)$.

Logo,

$$S_1 = \frac{1\cdot[(\cos\theta + i\text{sen}\,\theta)^n - 1]}{(\cos\theta + i\text{sen}\,\theta) - 1} = \frac{\cos n\theta + i\text{sen}\,n\theta - 1}{\cos\theta + i\text{sen}\,\theta - 1}$$
$$= \frac{1 - 2\text{sen}^2\frac{n\theta}{2} + 2i\text{sen}\,\frac{n\theta}{2}\cdot\cos\frac{n\theta}{2} - 1}{1 - 2\text{sen}^2\frac{n\theta}{2} + 2i\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2} - 1}$$
$$= \frac{2\text{sen}\,\frac{n\theta}{2}[-\text{sen}\,\frac{n\theta}{2} + i\cos\frac{n\theta}{2}]}{2\text{sen}\,\frac{n\theta}{2}[-\text{sen}\,\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2}]}$$
$$= \frac{\text{sen}\,\frac{n\theta}{2}\cdot\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{n\theta}{2}) + i\text{sen}\,(\frac{\pi}{2} + \frac{n\theta}{2})}{\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\cdot\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}) + i\text{sen}\,(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2})}$$
$$= \frac{\text{sen}\,\frac{n\theta}{2}}{\text{sen}\,\frac{\theta}{2}}\cdot\cos\left(\frac{n\theta}{2} - \frac{\theta}{2}\right) + i\text{sen}\,\left(\frac{n\theta}{2} - \frac{\theta}{2}\right).$$

b) $S_2 = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta$ é igual à parte real da solução acima (ítem a)).

$S_2 = \frac{\text{sen}\,\frac{n\theta}{2}}{\text{sen}\,\frac{\theta}{2}}\cdot\cos\left(\frac{n\theta}{2} - \frac{\theta}{2}\right) + i\text{sen}\,\left(\frac{n\theta}{2} - \frac{\theta}{2}\right)$

c) $S_3 = 1 + \text{sen}\,\theta + \text{sen}\,2\theta + \cdots + \text{sen}\,n\theta$ é igual à parte imaginaria da solução do ítem a).

$S_3 = \frac{\text{sen}\,\frac{n\theta}{2}}{\text{sen}\,\frac{\theta}{2}}\cdot\text{sen}\,\left(\frac{n\theta}{2} - \frac{\theta}{2}\right)$

## Seção 4

1. Seja $z$ um complexo não-nulo.

Seja $w$ uma raiz $n$-ésima de $z$, $w^n = z$, $w \neq 0$,

Sejam $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ as raízes $n$-ésimas da unidade.

$w\varepsilon_1, w\varepsilon_1, \ldots, w\varepsilon_{n-1}$ são $n$ complexos distintos (pois $w \neq 0$ e as raízes $n$-ésimas da unidade são distintas) e $(w\varepsilon_k)^n = w^n(\varepsilon_k)^n = z\cdot 1 = z$, ou seja, $w\varepsilon_1, w\varepsilon_1, \ldots, w\varepsilon_{n-1}$ são as $n$ raízes $n$-ésimas de $z$.

2. Sejam $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\text{sen}\,\frac{2k\pi}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ as raízes $n$-ésimas da unidade.

$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{n-1} = 1 + \varepsilon_1 + (\varepsilon_1)^2 + \cdots + (\varepsilon_1)^{n-1} = 1\cdot\frac{(\varepsilon_1)^n - 1}{\varepsilon_1 - 1} = 1\cdot\frac{1-1}{\varepsilon_1 - 1} = 0.$

3. Seja $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\text{sen}\,\frac{2k\pi}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ as raízes $n$-ésimas da unidade. Observamos que $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$. Temos

   $\varepsilon_0^p + \varepsilon_1^p + \varepsilon_2^p + \cdots + \varepsilon_{n-1}^p = 1 + \varepsilon_1^p + (\varepsilon_1)^{2p} + \cdots + (\varepsilon_1)^{(n-1)p} = 1 \cdot \frac{1-(\varepsilon_1^p)^n}{1-\varepsilon_1^p} = 0,$

   pois $\varepsilon_1^p \neq 1$ ($p$ não é múltiplo de $n$) e $(\varepsilon_1^p)^n = (\varepsilon_1^n)^p = 1^p = 1$.

4. Não possuem inverso aqueles que não são relativamente primos com 12

   Resposta: $\{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$.

5. Todos os que não são relativamente primos com $n$.

6. a) $7 + 9 = 16 \equiv 3$

   b) $7 \times 9 = 63 \equiv 11$

   c) $9 \times 11 = 66 \equiv 11$. Logo 6 é o inverso de 11.

   d) $3 - 7 = -4 \equiv 9$

   e) $2 + 3 = 5$.

7. a) $\varepsilon_{21} \cdot \varepsilon_{19} = \cos[21\frac{2k\pi}{34}] + i\text{sen}\,[21\frac{2k\pi}{34}] \cdot \cos[19\frac{2k\pi}{34}] + i\text{sen}\,[19\frac{2k\pi}{34}] = \cos[40\frac{2k\pi}{34}] + i\text{sen}\,[40\frac{2k\pi}{34}] = \cos[6\frac{2k\pi}{34}] + i\text{sen}\,[6\frac{2k\pi}{34}] = \varepsilon_6$

   Basta usar a aritmética modular: $21 + 19 = 40 \equiv 6 \pmod{34}$

   b) $(\varepsilon_{12})^{13} = \varepsilon_{12} \cdot \varepsilon_{12} \cdots \varepsilon_{12} = \varepsilon_{20}$ pois $12 + 12 + \cdots + 12 = 12 \times 13 = 156 \equiv 20$ (mod 34)

   c) $\varepsilon_{12} \cdot \varepsilon_{22} = \varepsilon_{34} = 1$. Logo $(\varepsilon_{12})^{-1} = \varepsilon_{22}$

   d) $\varepsilon_4 : \varepsilon_{-21} = \varepsilon_{13}$

8. Basta que $k$ seja relativamente primo em $15 \to k = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$.

   Resposta: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_4, \varepsilon_7, \varepsilon_8, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{14}$

9. Precisamos contar quantos são os valores de $k$ relativamente primos com 100.

   Para essa contagem, usaremos a função $\phi$ de Euler.

   $100 = 2^2 \cdot 5^2$

   $\phi(100) = 100(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{5}) = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = 40$

   Resposta: 40

10. Este problema é equivalente ao problema 2.

11. a) Se $d = \text{MDC}[p, q]$, existem inteiros positivos $a$ e $b$ tais que $p = ad$ e $q = bd$. Se $z^d = 1$, então $z \in Ap$ e $z \in Aq$, isto é, $Ad \subset Ap \cap Aq$.

b) Se $d = \text{MDC}[p, q]$, existem inteiros $s$ e $t$ tais que $d = sp + tq$ (Teorema de Bézout).

Se $z^p = 1$ e $z^q = 1$, então $z^d = z^{sp+tq} = (z^p)^s \cdot (z^q)^t = 1^s \cdot 1^t = 1$, ou seja, se $z \in Ap$ e $z \in Aq$, então $z \in Ad$, isto é, $Ap \cap Aq \subset Ad$.

c) Se $AD \subset Ap \cap Aq$ e $Ap \cap Aq \subset Ad$, temos $Ab \cap Aq = Ad$.

12. a) Se uma raiz $n$-ésima da unidade é também raiz $p$-ésima da unidade para algum $p < n$, suas potências são também raízes $p$-ésimas da unidade. Logo, essas potências poderão ter, no máximo, $p$ valores distintos, não podendo, portanto, gerar todas as $n$ raízes $n$-ésimas da unidade; ou seja, ela não é raiz $n$-ésima primitiva da unidade.

b) Se uma raiz $n$-ésima da unidade, $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i\text{sen}\, \frac{2k\pi}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, não é primitiva, $k$ não é relativamente primo com $n$. Logo existem $k_1$ e $p < n$ tais que $\frac{k}{n} = \frac{k_1}{p}$ e $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i\text{sen}\, \frac{2k\pi}{n} = \cos \frac{2k_1\pi}{p} + i\text{sen}\, \frac{2k_1\pi}{p}$ é uma raiz $p$-ésima da unidade, com $p < n$.

13. a) $(1+1)^n = C_n^0 + C_n 1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n$

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$

b) $(1-1)^n = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 0$

c) Somando e subtraindo os resultados de a) e b),

$$\begin{cases} 1[C_n^0 + C_n^2 + C_n^n + \cdots] = 2^n \\ 1[C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots] = 2^n \end{cases}$$

Daí, $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = \frac{1^n}{2} = 2^{n-1}$

d) Sejam $\varepsilon_0 = \cos \frac{2\cdot 0\cdot \pi}{3} + i\text{sen}\, \frac{2\cdot 0\cdot \pi}{3} = 1$

$\varepsilon_1 = \cos \frac{2\cdot 1\cdot \pi}{3} + i\text{sen}\, \frac{2\cdot 1\cdot \pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ e

$\varepsilon_2 \cos \frac{2\cdot 2\cdot \pi}{3} + i\text{sen}\, \frac{2\cdot 2\cdot \pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

as raízes cúbicas da unidade.

Sejam

$s_0 = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \cdots,$

$s_1 = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \cdots,$ e

$s_3 = C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \cdots.$

$(1+\varepsilon_0)^n = C_n^0 + C_n^1\varepsilon_0^1 + C_n^2\varepsilon_0^2 + \cdots + C_n^n\varepsilon_0^n \quad C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n$ já que $\varepsilon_0 = 1$

$(1+\varepsilon_0)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = s_0 + s_1 + s_2 = 2^n$

$(1+\varepsilon_1)^n = C_n^0 + C_n^1\varepsilon_1^1 + C_n^2\varepsilon_1^2 + \cdots + C_n^n\varepsilon_1^n$

No entanto,

$\varepsilon_1^0 = \varepsilon_1^3\varepsilon_1^6 = \cdots = 1$

$\varepsilon_1^1 = \varepsilon_1^4 = \varepsilon_1^7 = \cdots = \varepsilon_1$

$\varepsilon_2^2 = \varepsilon_2^5 = \varepsilon_2^7 = \cdots = \varepsilon_2$

Então

$$\begin{aligned}(1+\varepsilon_1)^n &= C_n^0 1 + C_n^1\varepsilon_1 + C_n^2\varepsilon_2 + C_n^3 1 + C_n^1\varepsilon_1 + C_n^5\varepsilon_2 + \cdots + C_n^n\varepsilon_1^n \\ &= s_0 + \varepsilon_1\cdot s_1 + \varepsilon_2\cdot s_2\end{aligned}$$

$(1+\varepsilon_2)^n = C_n^0 + C_n^1\varepsilon_2^1 + C_n^2\varepsilon_2^2 + C_n^3\varepsilon_2^3 + \cdots + C_n^n\varepsilon_2^n$

No entanto,

$\varepsilon_2^0 = \varepsilon_2^3\varepsilon_2^6 = \cdots = 1$

$\varepsilon_2^1 = \varepsilon_2^4 = \varepsilon_2^7 = \cdots = \varepsilon_2$

$\varepsilon_2^2 = \varepsilon_2^5 = \varepsilon_2^8 = \cdots = \varepsilon_1$

Então

$$\begin{aligned}(1+\varepsilon_2)^n &= C_n^0 1 + C_n^1\varepsilon_2 + C_n^2\varepsilon_1 + C_n^3 1 + C_n^4\varepsilon_2 + C_n^5\varepsilon_1 + \cdots + C_n^n\varepsilon_2^n \\ &= s_0 + \varepsilon_2\cdot s_1 + \varepsilon_1\cdot s_2\end{aligned}$$

Temos $\begin{cases}(1+\varepsilon_0)^n = s_0 + s_1 + s_2 \\ (1+\varepsilon_1)^n = s_0 + \varepsilon_1\cdot s_1 + \varepsilon_2\cdot s_2 \\ (1+\varepsilon_2)^n = s_0 + \varepsilon_2\cdot s_1 + \varepsilon_1\cdot s_2\end{cases}$

ou seja, $\begin{cases} s_0 + s_1 + s_2 = 2^n \\ s_0 + (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})s_1 + (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})s_2 = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^n \\ s_0 + (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})s_1 + (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})s_1 = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^n \end{cases}$

$\begin{cases} s_0 + s_1 + s_2 = 2^n \\ s_0 - \frac{1}{2}(s_1 + s_2) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(s_1 - s_2) = \cos\frac{n\pi}{6} - i\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6} \end{cases}$

Somando as 3 equações: $3\cdot s_0 = 2^n + 2\cos\frac{n\pi}{6}$.

Daí,

$C_n^0+C_n^3+C_n^6+\cdots=s_0=\frac{2^n}{3}+\frac{2}{3}\cos\frac{n\pi}{6}$. Além disso: subtraindo a terceira equação da segunda:

$i\sqrt{3}(s_1-s_2)=2i\text{sen}\,\frac{n\pi}{6}\Rightarrow s_1-s_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}\text{sen}\,\frac{n\pi}{6}$

Então

$s_1+s_2=2^n-s_0=2^n-\frac{2^n}{3}-\frac{2}{3}\cos\frac{n\pi}{6}=\frac{2}{3}\cdot 2^n-\frac{2}{3}\cos\frac{n\pi}{6}$ e $s_1-s_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}\text{sen}\,\frac{n\pi}{6}$

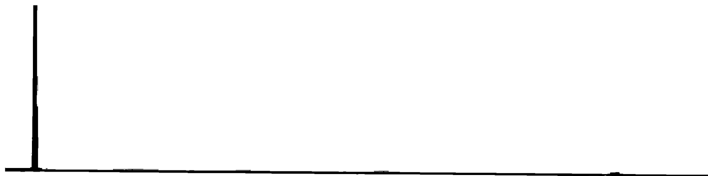
$2s_1=\frac{2}{3}\cdot 2^n-\frac{2}{3}\cdot\cos\frac{n\pi}{6}+\frac{2\sqrt{3}}{3}\text{sen}\,\frac{n\pi}{6}\Rightarrow s_1=\frac{2^n}{3}-\frac{1}{3}\cos\frac{n\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{3}\text{sen}\,\frac{n\pi}{6}$

$2s_2=\frac{2}{3}\cdot 2^n-\frac{2}{3}\cdot\cos\frac{n\pi}{6}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\text{sen}\,\frac{n\pi}{6}\Rightarrow s_2=\frac{2^n}{3}-\frac{1}{3}\cos\frac{n\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{3}\text{sen}\,\frac{n\pi}{6}$

e) $(1+i)^n=C_n^0+iC_n^1+i^2C_n^2+c^3C_n^3+i^4C_n^4+\cdots$

$\sqrt{2}^n(\cos\frac{n\pi}{4}+i\text{sen}\,\frac{n\pi}{4})=[C_n^0-C_n^2+C_n^4+\cdots]+i[C_n^1-C_n^3+C_n^5-\cdots]$

$C_n^0-C_n^2+C_n^4=\cdots=\text{Re}[\sqrt{2}^n(\cos\frac{n\pi}{4}+i\text{sen}\,\frac{n\pi}{4})]=\sqrt{2}^n\cos\frac{n\pi}{4}$.



# CAPÍTULO 6

## Equações Algébricas

### 6.1 Exercícios

1. Determine um polinômio $P$ do 3º grau pra o qual $P(x+1) = P(x) + x^2$ para todo $x$. Use-o para obter uma expressão para a soma $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

2. Obtenha os valores das coordenadas $A$, $B$ e $C$ tais que
$$\frac{2x+1}{x^3 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$
para todo $x$ tal que $x \neq 0$, $x \neq 1$ e $x \neq -1$.

3. Encontre um polinômio complexo de grau mínimo tal que $P(i) = -1$, $P(1) = 2 + i$ e $P(0) = 1$.

4. Determine os valores de $m$ e $n$ para os quais o polinômio $P(x) = x^3 + 3x^2 + mx + n$ é divisível por $x^2 - 3x + 2$.

5. Os restos da divisão de um polinômio $p(x)$ por $(x-3)$ e $(x+1)$ são, respectivamente, 1 e 4. determine o reto da divisão de $p$ por $(x-3)(x+1)$.

6. Se um polinômio $p$ é divisível pelo polinômios $p_1$ e $p_2$, então $p$ é divisível pelo produto $p_1 p_2$. Certo ou errado?

7. Sejam $p_1$ e $p_2$ polinômios não nulos. Um polinômio $m$ é chamando de máximo divisor comum (m.d.c.) de $p_1$ e $p_2$ quando $d$ satisfaz as duas condições abaixo

   i) $m$ é divisor comum de $p_1$ e $p_2$

   ii) se $d$ é um divisor comum de $p_1$ e $p_2$, então $d$ é divisor de $m$.

   a) Mostre que se $m_1$ e $m_2$ são mdcs de $p_1$ e $p_1$, então existe uma constante $c \neq 0$ tal que $m_1 = cm_2$ (isto é, o mdc de dois polinômios é único, a menos de uma constante multiplicativa).

   b) Mostre que se $p_2$ é divisor de $p_1$, então $p_2$ é um mdc de $p_1$ e $p_2$.

   c) Suponha que grau $(p_1) \geq$ grau $(p_2)$. Seja $r$ o resto da divisão de $p_1$ e $p_2$. Mostre que mdc $(p_1, p_2) =$ mdc $(p_2, r_1)$.

   d) Descreva um algoritmo que obtém o mdc de dois polinômios através de divisões sucessivas (algoritmo de Euclides).

   e) Ache o mdc dos polinômios $p(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 12$ e $q(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$.

   f) Mostre que $\alpha$ é raiz comum a dois polinômios $p$ e $q$ se e somente se $\alpha$ é raiz do seu mdc. Use este fato para achar as raízes comuns aos polinômios $p(x)$ e $q(x)$ acima.

   g) Sejam $p_1$ e $p_2$ dois polinômios e seja $m$ seu mdc. Mostre que um polinômio $p$ pode ser escrito na forma

   $$p = q_1p_1 + q_2q_2 \text{ (onde } q_1 \text{ e } q_2 \text{ são polinômios quaisquer)}$$

   se e somente se $p$ é múltiplo de $m$.

   h) Use a propriedade análoga para números inteiros para responder à seguinte pergunta: existem inteiros $m$ e $n$ tais que $75m + 28n = 3$?

8. Seja $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ um polinômio de grau $n$ e seja $a$ um número complexo.

   a) Mostre, através de divisões sucessivas por $(x - a)$, que $a$ pode ser desenvolvido segundo as potências de $(x - a)$; isto é, na forma $p(x) = b_n(x - a)^n + b_{n-1}(x - a)^{n-1} + \cdots + b_1(x - a) + b_0$.

   b) Desenvolva $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ segundo as potências de $(x - 1)$.

c) Use b) para obter uma equação cujas raízes são as raízes de $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$ diminuídas de 1 unidade.

9. Seja $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio de coeficientes inteiros. Mostre que se $a$ é uma raiz inteira de $P$, então $a$ é necessariamente um divisor de $a_0$. Utilize para verificar se a equação $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$ tem raízes inteiras.

10. Seja $P(x) = a_n x^m + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio de coeficientes inteiros. Mostre que se $a = p/q$ ($p$ e $q$ primos entre si) é uma raiz racional de $P$, então necessariamente $p$ é um divisor de $a_0$ e $q$ é um divisor de $a_n$. Utilize para verificar se a equação $3x^3 - 2x^2 + 9x - 6 = 0$ tem raízes racionais.

11. Seja $P(x) = ax^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio de coeficientes inteiros em que o temo mais alto grau tem coeficiente 1. $P$ pode ter raízes racionais não inteiras?

12. Sejam $a$, $b$ e $c$ as raízes de $x^3 + 3x^2 - x + 1 = 0$. Calcule:

    a) $1/a + 1/b + 1/c$

    b) $a^2 + b^2 + c^2$

13. Dada a equação $x^3 + 2x^2 - x - 3 = 0$, forme a equação cujas raízes são as recíprocas das raízes da equação original.

14. A *derivada* do polinômio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

é definida como o polinômio

$$p'(x) = a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$$

    a) Mostre que $a$ é raiz simples de $p$ se e só se $p(a) = 0$ e $p'(a) \neq 0$.

    b) Mostre que $a$ é raiz dupla de $p$ se e só se $p(a) = p'(a) = 0$ e $p''(a) \neq 0$

    c) Mostre que $a$ é raiz de multiplicidade $k$ ($k \leq n$) de $p$ se e só se $p(a) = p'(a) = \cdots = p^{(k-1)}(a) = 0$ e $p^{(k)}(a) \neq 0$.

15. Mostre que $a$ é raiz múltipla de um polinômio $p$ se e só se $a$ é raiz comum de $p$ e de sua derivada $p'$. Use esse fato para verificar se a equação $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x = 0$ tem raízes múltiplas.

16. Mostre que um polinômio $p(x)$ de grau $n$ pode ser escrito na forma

$$p(x) = p(a) + p'(a)(x - a) + \frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{p^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

onde $p^{(k)}$ denota a $k$-ésima derivada de $p$. (Esta expressão é conhecida como a *Fórmula de Taylor* para polinômios).

17. Forme a equação de grau mínimo que tem $i$ e $1 + 2i$ como raízes.

18. Forme a equação de grau mínimo, com coeficientes reais, que tem $i$ e $1 + 2i$ como raízes.

19. Determine um polinômio $P$ de grau mínimo, com coeficientes reais, tais que $P(1+i) = 0$ e $P(3) = 2$.

20. Determine um polinômio $P$ de grau mínimo, com coeficientes reais, tal que $P(i) = 2$ e $P(1+i) = 0$.

21. Seja $p$ um polinômio de grau ímpar. Mostre que existem números $x_1$ e $x_2$ tais que $P(x_1) > 0$ e $p(x_1) < 0$. Conclua que todo polinômio de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real.

22. Mostre que, se $n$ é par, então o polinômio

$$p(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1$$

não possui raízes reais.

23. Dizemos que um número é algébrico quando é raiz de uma equação algébrica com coeficientes inteiros. Mostre que o número $\sqrt{1+\sqrt{2}} + \sqrt{3}$ é algébrico.

24. Resolva a equação $(x+1)^n = x^n$.

25. Resolva a equação $(x+1)^n + (x-1)^n = 0$.

26. Mostre que o número $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$ é inteiro.

27. Mostre que a equação $x^3 - 3x + 1 = 0$ possui três raízes reais. Verifique, porém, que o cálculo dessas raízes utilizando a fórmula de resolução para a equação do 3º grau necessariamente envolve números complexos.

28. Seja $p(x) = x^3 - x$. Verifique o que ocorre quando se aplica o método de Newton para determinação de raízes com o ponto de partida $x_0 = \sqrt{5}/5$.

29. Nas calculadoras, raízes quadradas são obtidas usando o método de Newtom para o polinômio $p(x) = x^2 - a$, onde $a$ é o número cuja raiz quadrada se quer determinar.

    a) Mostre que a seqüencia de aproximações é dada recursivamente por

    $$x_{i+1} = \frac{x_i + \frac{a}{x_i}}{2}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

    b) Obtenha os primeiros termos para o calculo de $\sqrt{2}$.

## 6.2 Soluções

1. O polinômio procurado $P(x) = ax^3 + bx\ 2 + cx + d$ deve satisfazer a identidade $P(x+1) = P(x) + x^2$, ou seja, $a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d = ax^3 + bx^2 + cx + d + x^2$, o que é equivalente a $(3a-1)x^2 + (3a+2b)x + (a+b+c) = 0$. Isto ocorre se e só se os coeficientes deste último polinômio são todos nulos, ou seja, se e só se $3a - 1 = 0$, $3a + 2b = 0$ e $a + b + c = 0$. Resolvendo o sistema formado por estas três equações encontramos $a = 1/3$, $b = -1/2$ e $c = 1/6$. Logo, $P(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x + d$ (onde $d$ é arbitrário; podemos por exemplo, tomar $d = 0$).

   A identidade $P(x+1) = P(x) + x^2$ pode ser escrita na forma $x^2 = P(x+1) - P(x)$. Assim:

   $$\begin{aligned} 1^2 &= P(2) - P(1) \\ 2^2 &= P(3) - P(2) \\ &\cdots \\ (n-1)^2 &= P(n) - P(n-1) \\ n^2 &= P(n+1) - P(n) \end{aligned}$$

   Somando as igualdades membro a membro e observando o cancelamento dos termos, obtemos:

$$\begin{aligned}1^2+2^2+\cdots+n^2 &= P(n+1)-P(1)\\ &= \frac{1}{3}(n+1)^3-\frac{1}{2}(n+1)^2+\frac{1}{6}(n+1)-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\\ &= \frac{1}{3}(n+1)^3-\frac{1}{2}(n+1)^2+\frac{1}{6}(n+1)\end{aligned}$$

Esta expressão pode ser escrita e colocada na forma:

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Devemos ter

$$\begin{aligned}\frac{2x+1}{x^3-x} &= \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}\\ &= \frac{A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)}{x^3-x}\\ &= \frac{(A+B+C)x^2+(B-C)x-A}{x^3-x}.\end{aligned}$$

Logo, $2x+1=(A+B+C)x^2+(B-C)x-A$, o que ocorre se e só se $A+B+C=0$, $B-C=2$ e $-A=1$. Resolvendo, encontramos $A=-1$, $B=3/2$ e $C=-1/2$.

3. Existe um polinômio de grau menor ou igual a 2, de forma $P(x)=ax^2+bx+c$, que satisfaz as três condições dadas. Os valores de $a$, $b$ e $c$ são tais que $-a+ib+c=-1$, $a+b+c=2+i$, $c=1$. resolvendo, encontramos $a=1$, $b=i$ e $c=1$. Logo, o polinômio procurado é $P(x)=x^2+ix+1$.

4. $P(x)$ é divisível por $x^2-3x+2$ se e só se $P(x)$ se anula nas raízes de $x^2-3x+2=0$, ou seja, devemos ter $P(1)=P(2)=0$. Portanto:

$$\begin{aligned}4+m+n&=0\\ 20+2m+n&=0\end{aligned}$$

resolvendo, encontramos $m=-16$ e $n=12$.

Alternativamente, podemos efetuar a divisão:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3+3x^2+mx+n & x^2-3x+2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3+3x^2-2x} & x+6 \\
\quad 6x^2+(m-2)x+n & \\
\quad \underline{6x^2+18x-12} & \\
\quad (m+16)x+(n-12) &
\end{array}
$$

$P(x)$ é divisível por $x^2-3x+2$ se e só se o resta da divisão é identicamente nulo, ou seja, $m+16=0$ e $n-12=0$. Assim, $m=-16$ e $n=12$.

5. Denotando o quociente e o resto da divisão por $Q(x)$ e $R(x)$, temos $P(x) = Q(x)(x-3)(x+1)+R(x)$. Como o divisor é de grau 2, o resto $R(x)$ é de grau menor ou igual a 1; portanto, é da forma $R(x) = ax+b$. Para encontrar $a$ e $b$, basta, na identidade $P(x) = Q(x)(x-3)(x+1)+ax+b$, tomar $x$ igual às raízes 3 e $-1$ do divisor. Para $x=3$, temos $P(3) = a\cdot 3+b$; como $P(3)$ é igual ao resto da divisão de $P(x)$ por $x-3$, que é igual a 1, temos assim $3a+b=1$. Para $x=-1$, temos $P(-1) = a\cdot(-1)+b$; mas $P(-1)$ é igual ao resto da divisão de $P(x)$ por $x+1$, que é 4. Logo, $-a+b=4$. Resolvendo o sistema formado pelas duas equações, encontramos $a=-3/4$ e $b=13/4$. Portanto, o resto da divisão de $P(x)$ por $(x-3)(x+1)$ é $R(x) = -3/4+13/4$.

6. Errado. Por exemplo, $P(x) = x^3(x-1)$ é divisível por $p_1(x) = x^2$ e por $p_2(x) = x(x-1)$, mas não pelo produto $p_1(x)p_2(x) = x^3(x-1)$. A afirmação seria verdadeira, no entanto, sob a condição adicional de que $p_1$ e $p_2$ sejam primos relativos entre si (ou seja, só admitiram polinômios constantes como divisores comum).

7. a) Suponhamos que $m_1$ e $m_2$ sejam mdcs de $p_1$ e $p_2$. Como $m_1$ é mdc de $p_1$ e $p_2$ e $m_2$ é divisor comum, $m_2$ é divisor de $m_1$; logo, existe $c_1$ tal que $m_1 = c_1m_2$. Mas o mesmo argumento é valido trocando os papeis de $m_1$ e $m_2$; assim, $m_1$ é o divisor de $m_2$ e existe $c_2$ tal que $m_2 = c_2m_1$. Logo, existem $c_1$ e $c_2$ tais que $m_1 = c_1c_2m_1$, ou seja, $m_1(c_1c_2-1)=0$. Portanto, $c_1c_2$ é identicamente igual a 1, o que mostra que $c_1$ e $c_2$ são polinômios constantes não nulos $m_1 = c_1m_2$. Logo, $m_1 = c_1m_2$ para algum $c_1/0$.

   b) Suponhamos que $p_2$ seja um divisor de $p_1$; isto é, existe $q$ tal que $p_1 = pq_2$. Se $d$ é um divisor de $p_2$ (ou seja, $p_2 = sd$, para algum $s$), então $d$ é também

divisor de $p_1$ (já que $p_1 = qp_2 = qsd$). Logo, os divisores comuns a $p_1$ e $p_2$ são exatamente os divisores de $p_2$. Como $p_2$ divide $p_1$ e $p_2$ e todo divisor comum de $p_1$ e $p_2$ e divisor de $p_2$, concluímos que $p_2$ é mdc de $p_1$ e $p_2$.

c) Seja $d$ um divisor comum de $r$ e $p_2$; como $p_2 = qp_1 + r$, $d$ também é divisor de $p_2$. Por outro lado, se $d$ é um divisor comum de $p_1$ e $p_2$, $d$ é também divisor de $r$, já que $r = p_2 - qp_1$. Portanto, $p_1$ e $p_2$ têm os mesmos divisores comuns que $r$ e $p_2$. Logo, mdc$(p_1, p_2)$ =mdc$(p_2, r)$.

d) Para $n = 1$, defina $p_{n+2}$ como o resto da divisão de $p_n$ por $p_{n+1}$. Pelo ítem anterior, mdc$(p_1, p_2)$ =mdc$(p_2, p_3)$ =mdc$(p_3, p_4)$ $= \cdots$. Por outro lado, como os polinômios $p_n$ têm graus decrescentes, após um número finito de passos necessariamente encontramos um polinômio $p_n$ identicamente nulo. Quando isto ocorre, $p_{n-2}$ é múltiplo de $p_{n-1}$ e, em conseqüência, o mdc de $p_{n-2}$ e $p_{n-1}$ (e portanto de $p_1$ e $p_2$) é $p_{n-1}$.

e) Seja $p_1(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 12$ e $p_2(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$. O resto da divisão de $p_1(x)$ por $p_2(x)$ é $p_3(x) = -x^2 + 7x - 12$. O resto da divisão de $p_2(x)$ por $p_3(x)$ é 0 e portanto, $p_3(x) = -x^2 + 7x - 12$ é um mdc de $p_1$ e $p_2$.

f) Se $a$ é raiz comum a $p$ e $q$ então $(x - a)$ é divisor comum de $p$ e $q$. Logo, $(x - a)$ é necessariamente um divisor de mdc$(p, q)$, o que mostra que $a$ é raiz de $m$ =mdc$(p, q)$. Por outro lado $m$ é divisor comum de $p$ e $q$ ou seja, existem $s$ e $t$ tais que $p = ms$ e $q = mt$; logo, se $a$ anula $m$, então $a$ necessariamente anula $p$ e $q$. para encontrar as raízes comuns a $p(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 12$ e $q(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ basta, portanto, encontrar as raízes de seu mdc $m(x) = -x^2 + 7x - 12$, que são 3 e 4.

g) Suponha que $p = q_1p_1 + q_2p_2$. Como $m$ é divisor comum de $p_1$ e $p_2$, existem $s_1$ e $s_2$ tais que $p_1 = s_1m$ e $p_2 = s_2m$; logo, $p = m(q_1s_1 + q_2s_2)$, o que mostra que $p$ é múltiplo de $m$

Suponha agora que $p$ seja múltiplo de $m$. Seja $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}$ a seqüencia obtida com o algoritmo de Euclides, com $p_n = m$ e $p_{n+1} = 0$. Denote-

mos, ainda, por $q_i$ o resto da divisão de $p_i$ por $p_{i+1}$. Ou seja

$$\begin{aligned} p_1 &= q_1 p_2 + p_3 \\ p_2 &= q_2 p_3 + p_4 \\ &\vdots \\ p_{n-3} &= q_{n-3} p_{n-2} + p_{n-1} \\ p_{n-2} &= q_{n-2} p_{n-1} + p_n (= m) \\ p_{n-1} &= q_{n-1} m \end{aligned}$$

Da penúltima equação, obtemos $m = p_{n-2} - q_{n-2}p_{n-1}$, o que mostra que $m$ pode ser expresso como uma combinação linear de $p_{n-2}$ e $p_{n-1}$. Mas da equação anterior obtemos $p_{n-1} = p_{n-3} - q_{n-3}p_{n-2}$. Substituindo, obtemos:

$$\begin{aligned} m &= p_{n-2} - q_{n-2}(p_{n-3} - q_{n-3}p_{n-2}) \\ &= (1 - q_{n-2}q_{n-3})p_{n-2} - q_{n-2}p_{n-3}. \end{aligned}$$

Logo, $m$ também pode ser expresso como combinação linear de $p_{n-3}$ e $p_{n-2}$. O processo pode ser repetido com as equações anteriores, até expressar $m$ como combinação linear de $p_1$ e $p_2$.

h) De modo análogo ao demonstrado no ítem anterior, existem inteiros $m$ e $n$ tais que $am + bn = c$ se e só se $c$ for múltiplo do mdc de $a$ e $b$. Como 3 é múltiplo de mdc(75,28)=1, existem tais $m$ e $n$ (por exemplo, pode-se tomar $m = 9$ e $n = 24$).

8. a) Seja $p(x)$ um polinômio de grau $n$. Dividindo $p(x)$ por $(x - a)$ podemos escrever $p(x) = q_1(x)(x - a) + b_0$. Dividindo agora $q_1$ por $(x - a)$, podemos escrever $q_1(x) = q_2(x - a) + b_1$ e, daí, $p(x) = q_2(x - a)^2 + b_1(x - a) + b_0$. Os graus dos quocientes $q_i$ descressem de uma unidade a cada passo e o processo pára quando $q_n(x)$ é constante e igual a $b_n$. Neste ponto, teremos obtido $p(x) = b_n(x - a)^n + b_{n-1}(x - a)^{n-1} + \cdots + b_1(x - a) + b_0$.

b) Dividindo sucessivamente $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ por $x - 1$, temos:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 3 | -4 | -12 |
| 1 | 1 | 4 | 0 | -12 |
| 1 | 1 | 5 | 5 | |
| 1 | 1 | 6 | | |
| 1 | 1 | | | |

Logo, $p(x) = (x - 1)^3 + 6(x - 1)^2 + 5(x - 1) - 12$

c) As raízes do polinômio $q(y) = y^3 + 6y^2 + 5y - 12$ são os valores de $(x - 1)$ para os quais $x$ é raiz do polinômio original. Ou seja, as raízes de $q(y)$ são as raízes de $p(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ diminuídas de uma unidade. Para obter a equação cujas raízes são as de $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ aumentadas de uma unidade, basta expressar $p(x)$ em termos das potências de $(x + 1)$, através das divisões sucessivas por $x + 1$.

| | 1 | 3 | -4 | -12 |
|---|---|---|---|---|
| -1 | 1 | 2 | -6 | -6 |
| -1 | 1 | 1 | -7 | |
| -1 | 1 | 0 | | |
| -1 | 1 | | | |

Logo, $p(x) = (x+1)^3+0(x+1)^2-7(x+1)-6$ e a equação cujas raízes são as mesmas do polinômio original aumentadas de uma unidade é $y^3-7y-6 = 0$.

9. Se $a$ é raiz de $p(x) = a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ então $a_na^n+a_{n-1}a^{n-1}+\cdots+a_1a+a_0 = 0$. Ou seja, $a_0 = -a_na^n+-_{n-1}a^{n-1}-\cdots-a_1a = -(a_na^{n-1}+a_{n-1}a^{n-2}+\cdots+a_1)a$, que é múltiplo de $a$. Para verificar se $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ tem raízes inteiras, basta testar se os divisores de 12 (ou seja, $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$) são raízes. Verifica-se, assim, que $-2, 2$ e $-3$ são raízes de polinômio dado.

10. Se $a = p/q$ é raiz de $p(x) = a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ então $= a_n(p/q)^n+a_{n-1}(p/q)^{n-1}+\cdots+a_1(p/q)+a_0 = 0$, ou seja, $a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+\cdots+a_1pq^{n-1}+a_0q^n = 0$. Daí, $a_0q^n = -(a_np^{n-1}+a_{n-1}p^{n-2}q+\cdots+a_1q^{n-1})p$, ou seja, $a_0q^n$ é múltiplo de $p$. Como $q$ e $p$ são primos entre si, isto implica que $p$ seja divisor de $a_0$. Temos também $a_np^n = -(a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1pq^{n-2}+a_0q^{n-1})q = 0$. Pelo mesmo argumento anterior, $p$ é necessariamente divisor de $a_n$. As possíveis raízes racionais de $3x^3-2x^2-6 = 0$ são, portanto, $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm1/3, \pm2/3$. verifica-se, porém, que nenhum destes valores anula o polinômio dado, que não possui, portanto, raízes racionais.

(Observação: na verdade, o polinômio desejado era $P(x) = 3x^3-2x^2-9x-6 = 0$; os candidatos a raízes racionais são os mesmo, mas neste caso $p(2/3) = 0$. Dividindo $P(x)$ por $x - 2/3$ obtemos quociente $q(x) = 3x^2 - 9$. Portanto, as demais raízes da equação são as raízes de $3x^2 - 9 = 0$, ou seja, $x = \pm\sqrt{3}$.)

11. Não. Se o polinômio tiver raízes da forma $p/q$, com $p$ e $q$ primos entre si, então $q$ deve ser um divisor de $a_n = 1$. Neste caso, $q = \pm1$ e $p/q$ é necessariamente

inteiro.

12. a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc+ac+ab}{abc} = \frac{S_2}{S_3} = \frac{-1}{-1} = 1$.
b) $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc) = S_1^2 - 2S_2 = 0 - 2 \cdot (-1) = 11$.

13. Para cada raiz $x$ da equação original, seja $y = 1/x$. Então $y$ deve satisfazer $\left(\frac{1}{y}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{y}\right)^2 - \frac{1}{y} - 3 = 0$, ou seja, $-3y^3 - y^2 + 2y + 1 = 0$.

14. Inicialmente, é conveniente estabelecer algumas propriedades básicas da derivada definida no exercício (naturalmente, estas propriedades são as mesmas da derivada definida no cálculo diferencial).

i) (linearidade) $(p+q)' = p' + q'$ e $(\alpha p)' = \alpha p'$.

ii) Se $p(x) = xq(x)$, então $p'(x) = xq'(x) + q(x)$. (De fato, se $q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, então $p(x) = a_n x^{n+1} + a_{n-1}x^n + \cdots + a_1 x^2 + a_0 x$. Logo, $p'(x) = (n+1)a_n x^n + n a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + 2a_1 x + a_0 = (n a_n x^n + (n-1)a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x) + (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = xq'(x) + q(x)$.

iii) Se $p(x) = (x-a)q(x)$, então $p'(x) = (x-a)q'(x) + q(x)$. Como $p(x) = xq(x) - aq(x)$, temos $p'(x) = xq'(x) + q(x) - aq'(x) = (x-a)q'(x) + q(x)$.

iv) De modo geral, a derivada de $p(x)q(x)$ e $p'(x)q(x) + p'(x)q(x)$. [Pode-se, por exemplo, escrever $p(x) = xp_0(x) + c$ e utilizar indução no grau de $p$].

a) Se $\alpha$ é raiz simples de $p(x)$ então $p(x) = (x-\alpha)q(x)$, com $q(\alpha) \neq 0$. Daí $p(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) = 0$ e, como $p'(x) = q(x) + (x-\alpha)q'(x)$, temos $p'(\alpha) = q(\alpha) \neq 0$. Reciprocamente, se $p(\alpha) = 0$ e $p'(\alpha) \neq 0$, então $p(x) = (x-\alpha)q(x)$ pois $\alpha$ é raiz de $p(x)$ e como $p'(x) = (x-\alpha)'q(x) + (x-\alpha)q'(x) = q(x) + (x-\alpha)q'(x)$, temos $q(\alpha) = p'(\alpha) \neq 0$ (portanto, $\alpha$ é raiz simples).

b) Se $\alpha$ é raiz dupla de $p(x)$ então $p(x) = (x-\alpha)^2 q(x)$, com $q(\alpha) \neq 0$. Daí, $p(\alpha) = (\alpha-\alpha)q(\alpha) = 0$ e, como $p'(x) = [(x-\alpha)^2]'q(x) + (x-\alpha)q'(x) = 2(x-\alpha)q(x) + (x-\alpha)^2 q'(x)$ e $p''(x) = 2q(x) + 4(x-\alpha)q'(x) + (x-\alpha)^2 q''(x)$, $p'(\alpha) = 0$ e $p''(\alpha) = 2q(\alpha) \neq 0$. Reciprocamente, se $p(\alpha) = p'(\alpha) = 0$ e $p''(\alpha) \neq 0$, então $p(x) = (x-\alpha)q(x)$ pois $\alpha$ é raiz de $p(x)$ e, como $p'(x) = (x-\alpha)'q(x) + (x-\alpha)q'(x) = q(x) + (x-\alpha)q'(x)$, $q(\alpha) = p'(\alpha) = 0$; logo, $\alpha$ é raiz de $q(x)$ e, portanto, $q(x)$ é divisível por $(x-\alpha)$, o que garante a existência de um polinômio $q_1(x)$ tal que $q(x) = (x-\alpha)q_1(x)$.

Então $p(x) = (x - \alpha)q(x) = (x - \alpha) \cdot (x - \alpha)q_1(x) = (x - \alpha)^2 q_1(x)$; como $p'(x) = [(x - \alpha)^2]' q_1(x) + (x - a)^2 q_1'(x) = 2(x - a)q_1 + (x - \alpha)^2 q_1'(x)$ e $p''(x) = 2q_1(x) + 4(x - \alpha)q_1'(x) + (x - \alpha)^2 q_1''(x)$, $p''(\alpha) = 2q(\alpha)$, $q(\alpha) = \frac{1}{2}p''(\alpha) \neq 0$.

c) O argumento de ítem anterior pode ser utilizado em uma prova por indução. A solução mais simples, no entanto, consiste em utilizar o resultado do exercício 16, segundo o qual

$$p(x) = p(a) + p'(a)(x - a) + \frac{p''(a)(x - a)^2}{2} + \cdots + \frac{p^{(n)}(x - a)^n}{n!}.$$

Dividindo $p(x)$ por $(x - a)^k$ obtemos quociente

$$q(x) = \frac{p^{(k)}(a)}{k!} + \cdots + \frac{p^{(n-k)}(a)(x - a)^{n-k}}{n!}$$

e resto

$$r(x) = p(a) + p'(a)(x - a) + \cdots + \frac{p^{(k-1)}(a)(x - a)^{k-1}}{(k - 1)!}.$$

Por outro lado, $a$ é raiz de multiplicidade $k$, se e somente se, $p(x) = (x - a)^k q(x)$, com $q(a) \neq 0$ (ou seja, $q(s) \neq 0$ e $r(x) \equiv 0$). Mas isto ocorre se e somente se $q(a) = \frac{p^{(k)}(a)}{k!} \neq 0$ (isto é, $p^{(k)}(a) \neq 0$) e cada um dos coeficientes de $r(x)$ é nulo, isto é, $p(a) = p'(a) = \cdots = p^{(k-1)}(a) = 0$.

15. Pelo exercício anterior $a$ é raiz de multiplicidade pelo menos $k$ se e só se $p$ e suas $k - 1$ primeiras derivadas se anulam em $a$. Logo, $a$ é raiz múltipla quando pelo menos $p$ e $p'$ se anulam em $a$. Para verificar se um polinômio possui raízes múltiplas basta, portanto, verificar se $p$ e $p'$ possuem alguma raiz comum, o que pode ser feito através do calculo do mdc de $p$ e $p'$. Para $p(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4$, temos $p'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 6x + 4$. Empregando o algoritmo de Euclides, determinamos que seu mdc é $m(x) = x - 2$. Logo, 2 é a única raiz múltipla de $p(x)$. Dividindo $p(x)$ por $(x - 2)$ verificamos que $p(x) = (x - 2)^2(x^2 - 1)$. logo, suas raízes são 2 (dupla), 1 e $-1$.

16. Como visto no exercício 8, todo polinômio $p(x)$ de grau $n$ pode ser expresso em termos das potências de $(x - a)$, na forma $p(x) = b_0 + b_1(x - a) + \cdots + b_{n-1}(x - a)^{n-1} + b_n(x - a)^n$. Basta, agora, relacionar os coeficientes $b_i$ com as

derivadas de $p$ no ponto $a$. Para isto, começamos por observar que a derivada de $(x-a)^n$ é $n(x-a)^{n-1}$. [Uma alternativa para demonstrar este fato é usar a expressão de $(x-a)^n$ em binômio de Newton; outra consiste em utilizar indução: é trivial verificar a expressão para $n = 1$; supondo válido para $n$, seja $p(x) = (x-a)^{n+1} = (x-a)(x-a)^n$; logo $p'(x) = (x-a)n(x-a)^{n-1}+(x-a)^n = (n+1)(x-a)^{n+1}$].

Basta agora, tomar as derivadas sucessivas $p(x) = b_0+b_1(x-a)+\cdots+b_{n-1}(x-a)^{n-1} + b_n(x-a)^n$ e o seu valor no ponto $a$. Temos:

$p(a) = b_0$ (ou seja, $b_0 = p(a)$)

$p'(x) = b_1 + 2b_2(x-a) + \cdots + (n-1)b_{n-1}(x-a)^{n-2} + nb_n(x-a)^{n-1}$; logo, $p'(a) = b_1$ (ou seja, $b_1 = p'(a)$)

De modo geral:

$p^{(k)}(x) = k(k-1)\cdots 1\cdot b_k + (k+1)k\cdots 2b_{k-1}(x-a) + \cdots + n(n-1)\cdots(n-k+1)b_n(x-a)^{n-k}$; logo $p^{(k)}(a) = k!b_k$ (ou seja, $b_k = p^{(k)}(a)/k!$).

17. A equação é $(x-i)(x-1-2i) = 0$.

18. Neste caso, a equação tem também $-i$ e $1-2i$ como raízes e é $(x-i)(x+i)(x-1-2i)(x-1+2i) = (x^2+1)(x^2-2x+5) = 0$

19. Como o polinômio tem coeficientes reais, deve-se ter também $P(1-i) = 0$. O polinômio de grau mínimo satisfazendo as condições dadas tem grau 2 e é da forma $P(x) = a(x-1-i)(x-1+i) = a(x^2-2x+2)$. Para $x = 3$, temos $2 = P(3) = a\cdot 5$. Logo, $a = 2/5$ e o polinômio é $P(x) = 2/5(x^2-2x+2)$.

20. O polinômio deve satisfazer, ainda $P(-i) = 2$ e $P(1-i) = 0$. O polinômio de grau mínimo tem grau 3, e é da forma $P(x) = (x-(1+i))(x-(1-i))(ax+b) = (x^2-2x+2)(ax+b)$. Para $x = i$, temos $2 = P(i) = (1-2i)(ai+b) = (2a+b)+(a-2b)i$. Logo, devemos ter $2a+b = 2$ e $a - 2b = 0$, ou seja, $a = 4/5$ e $b = 2/5$. Assim, $P(x) = (x^2-2x+2)(4/5x+2/5) = \frac{2}{5}(2x^3 - 3x^2+2x+2)$.

21. Seja $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ um polinômio de grau ímpar. vamos supor que $a_0 > 0$ (argumento análogo vale no caso em que $a_n < 0$). Podemos escrever, para todo $x/0$, $p(x) = x^n(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n})$. Tomemos um valor positivo de $x$ tal que cada uma das frações $\frac{a_{n-1}}{x}, \frac{a_1}{x^{n-1}}, \ldots, \frac{a_0}{x^n}$ seja menor que $\frac{a_n}{n}$ em valor absoluto (tal valor existe, já que cada uma destas frações pode ser tomada arbitrariamente pequena, bastando fazer com que $x$

seja suficientemente grande). Para tal valor de $x$ (e também para $-x$), o sinal da expressão dentro dos parênteses terá, então o mesmo sinal de $a_n$, ou seja, a expressão assumirá um valor positivo. Logo, $p(x) > 0$ (já que $x^n > 0$) e $p(-x) < 0$ (já que $(-x)^n < 0$).

22. Observamos que $p(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$, para $x/1$. Logo, toda raiz do polinômio é raiz de $x^{n+1} - 1 = 0$. Para $n$ par, a única raiz desta equação é $x = 1$. Como $p(1) = n + 1/0$, 1 não é raiz do polinômio original. Portanto, $p(x)$ não tem raízes. Quando $n$ é ímpar, $-1$ também é raiz de $x^{n+1} - 1 = 0$ e é raiz de $p(x)$.

23. Seja $x = \sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{3}$. Temos $(x-\sqrt{3})^2 = 1+\sqrt{2}$, ou seja, $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 1 + \sqrt{2}$, ou ainda $2\sqrt{3}x + \sqrt{2} = x^2 + 2$. Elevando novamente ao quadrado, obtemos $12x^2 + 4\sqrt{6}x + 2 = (x^2+2)^2$, ou seja, $4\sqrt{6}x = x^4 - 9x^2 + 2$. Elevando uma última vez ao quadrado, obtemos, finalmente $96x^2 = (x^4 - 8x^2 + 2)^2$, o que mostra que $x$ é raiz de uma equação polinomial com coeficientes inteiros; portanto, $x$ é algébrico.

24. Claramente, 0 não é raiz da equação que, portanto, não se altera quando os dois membros são divididos por $x^n$, fornecendo $\left(\frac{x+1}{x}\right)^n = 1$; ou seja, $\frac{x+1}{x}$ deve ser igual a uma as raízes da unidade. Portanto, $\frac{x+1}{x} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}$, para $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Daí, obtemos

$$x = \frac{1}{\left(\cos\frac{2k\pi}{n} - 1\right) + i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}}$$

Note que, para $k = 0$, o denominador é nulo. Logo, há $n - 1$ raízes, correspondendo a $k = 1, 2, \ldots, n-1$ na expressão anterior (observe que, de fato, a equação dada é de grau $n - 1$, já que o termo em $x^n$ cancela).

25. Claramente, $x = 1$ não é raiz da equação, que é equivalente a $\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -1$. Logo, devemos ter $\frac{x+1}{x-1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}$, ou seja,

$$x = \frac{\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + 1\right) + i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}}{\left(\cos\frac{2k\pi}{n} - 1\right) + i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}}$$

26. Seja $x = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$. Elevando ao cubo, obtemos

$$\begin{aligned} x^3 =& (20+14\sqrt{2}) \\ &+ 3\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\right)^2 \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} \\ &+ 3\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\left(\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)^2 \\ &+ (20-14\sqrt{2}) = 40 \\ &+ 3\left(\underbrace{\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}}_{x}\right)\sqrt[3]{400-392} = 40+6x \end{aligned}$$

Portanto, o número real dado é raiz da equação $x^3-6x-40=0$. Pesquisando entre as possíveis raízes inteiras da equação, constatamos que 4 é raiz. Dividindo o polinômio $x^3-6x-40$ por $x-4$ encontramos quociente $x^2+4x+10$. Como a equação do 2º grau $x^2+4x+10=0$ não possui raízes reais, concluímos que 4 é a única raiz real da equação $x^3-6x-40=0$. Logo, o número $x = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ é necessariamente igual a esta raiz real, ou seja, é igual a 4.

27. Seja $P(x) = x^3-3x+1$. Basta observar que $P(-2)=-1$, $P(0)=1$, $P(1)=-1$ e $P(2)=3$. Portanto, $P(x)$ tem três raízes reais: uma entre $-2$ e 0, outra entre 0 e 1 e outra entre 1 e 2. No entanto, a fórmula de resolução das equações do 2º grau envolve calcular

$$\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{27}{27}} = \sqrt{-\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\imath.$$

28. Temos $p'(x) = 3x^2-1$. Como $x_0 = \frac{\sqrt{5}}{5}$, temos:

$$p(x_0) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^3 - \frac{\sqrt{5}}{5} = -\frac{4\sqrt{5}}{25} \quad \text{e} \quad p'(x_0) = 3\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 1 = -\frac{2}{5}.$$

Logo,

No próximo passo:

$$p(x_1) = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^3 + \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{4\sqrt{5}}{25} \quad \text{e} \quad p'(x_0) = 3\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) - 1 = -\frac{2}{5}.$$

Logo,

$$x_2 = x_1 - \frac{p(x_1)}{p'(x_1)} = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) - \frac{-\frac{4\sqrt{5}}{25}}{-\frac{2}{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Portanto, a seqüencia retorna ao valor inicial e fica, assim, oscilando entre $\frac{\sqrt{5}}{5}$ e $-\frac{\sqrt{5}}{5}$, não convergindo para nenhuma das raízes da equação (que, neste caso, são $-1$, $0$ e $1$). Isto mostra como o comportamento do método de Newton depende de uma boa escolha para a aproximação inicial.

29. a) Com $p(x) = x^2 - a$, temos $p'(x) = 2x$ e a interação genérica do método de Newton fornece

$$x_{i+1} = x_i - \frac{p(x_i)}{p'(x_i)} = x_i^2 - \frac{x_i^2 - a}{2x_i} = \frac{x_i^2 + a}{2x_i} = \frac{x_i + \frac{a}{x_i}}{2}.$$

Note que esta interação fornece, como a aproximação seguinte, a média aritmética entra a aproximação interior e seu "comprimento multiplicativo", ou seja, o número pelo qual deve ser multiplicado para obter $a$.

b) Iniciando, por exemplo, de $x_0 = 1$, temos $x_1 = 3/2 = 1,5$; $x_2 = 17/12 = 1,41666\ldots$; $x_3 = 577/408 = 1,414215\ldots$ e assim por diante. Note que esta última aproximação já possui 5 casas decimais corretas.

SBM

*(continuação dos títulos publicados)*

- *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 5 - Teoria dos Números* - Antonio Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 6 - Polinômios* - Antonio Caminha

## *COLEÇÃO INICIAÇÃO CIENTÍFICA*

- *Números Irracionais e Transcendentes* - D. G. de Figueiredo

## *COLEÇÃO TEXTOS UNIVERSITÁRIOS*

- *Introdução à Computação Algébrica com o Maple* - L. N. de Andrade
- *Elementos de Aritmética* - A. Hefez
- *Métodos Matemáticos para a Engenharia* - E. C. de Oliveira e M. Tygel
- *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies* - M. P. do Carmo
- *Matemática Discreta* L. Lovász, J. Pelikán e K. Vesztergombi
- *Álgebra Linear* - H. P. Bueno
- *Introdução às Funções de uma Variável Complexa* - C. S. Fernandez, N. C. Bernardes Jr.
- *Elementos de Topologia Geral* - E. L. Lima
- *A Construção dos Números* - J. Ferreira
- *Introdução à Geometria Projetiva* - A. Barros e P. Andrade
- *Análise Vetoria Clássica* F.Acker

## *COLEÇÃO MATEMÁTICA APLICADA*

- *Introdução à Inferência Estatística* - H. Bolfarine e M. Sandoval

## *COLEÇÃO OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA*

- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 1a a 8a* - E. Mega, R. Watanabe
- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 9a a 16a* - C. Moreira, E. Motta, E. Tengan, L. Amâncio, N. Saldanha, P. Rodrigues
- *21 Aulas de Matemática Olímpica* - C. Y. Shine